线性规划的梯度投影算法

何光宗*　　　　陈华富
(四川联合大学应用数学系 成都 610065) (电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 Karmarkar算法是解线性规划的多项式算法,但其具有数值不稳定的缺点,同时,由于它属于内点法,在算法终止时所得的点始终是一个近似最优解。文中给出的梯度投影法,可以穿过区域内部,或穿过区域的边界的相对内部,证明了该方法将在有限步终止。

关 键 词 线性规划; 梯度投影; 有限步终止; 内部区域
中图分类号 O212. 1

1 问题与假设

考虑线性规划

$$(p)\begin{cases} \min C^T X \\ \text{s.t.} \begin{cases} a_i^T x = b_i & i \in I = \{1, 2, \cdots, m_1\} \\ a_i^T x \geqslant b_i & i \in J = \{m_1 + 1, m_1 + 2, \cdots, m\} \\ x_i \geqslant 0 & i \in L = \{1, 2, \cdots, n\} \end{cases} \end{cases}$$

用 R 表示可行区域,对任一可行点 x^k,记

$$J_0(x^k) = \{i | i \in J, a_i^T x^k = b_i\}, L(x^k) = \{i | i \in L, x_i^k = 0\}$$

$$A(x^k) = (a_i^T | i \in I \cup J_0(x^k)), E(x^k) = (e_i^T | i \in L(x^k))$$

这里 e_i 是第 i 个分量为 1的 n 维单位向量。

本文假设: 1) $A(x^k)$ 行满秩; 2) 线性规划非退化。令 $H_k = \begin{pmatrix} A(x^k) \\ E(x^k) \end{pmatrix}$,由上述假设知 H_k 是行满秩的。令 $P_k = E - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k$, $B_k = (H_k H_k^T)^{-1} H_k$, $D_k = \begin{pmatrix} V \\ U \\ W \end{pmatrix} = -B_k C$,其中 $V = (v_1, v_2, \cdots v_{m_1}$, v_i, $i = 1, 2, \cdots, m_1)$,对应于等式约束, $U = (u_i | i \in J_0(x^k))$, u_i, $i \in J_0(x^k)$,对应于等式紧约束, $W = (w_i | i \in L(x^k))$, w_i, $i \in L(x^k)$,对应非负限制的紧约束。

$F_k = (f_i | i \in I \cup J_0(x^k) \cup L(x^k))$, f_i 定义如下

$$f_i = \begin{cases} 0 & i \in I \\ (u_i)_+ & i \in J_0(x^k) \\ (w_i)_+ & i \in L(x^k) \end{cases} \quad 这里 (\cdot)_+ = \begin{cases} (\cdot) & 当 (\cdot) > 0 \\ 0 & 当 (\cdot) \leqslant 0 \end{cases}$$

令 $\_k = \dfrac{F_k^T F_k}{F_k^T B_k B_k^T F_k + 1}$,算法中搜索方向为

$$d_k = -P_k C + \_k B_k^T F_k \tag{1}$$

⒇ 1997年 4月 1日收稿
* 男 57岁 大学 副教授

2 算法及有关性质

步骤 1 任取一可行点 x^1,令 $k:=1$;

步骤 2 计算 $B_k, P_k, F_k, d_k = d(x^k)$;

步骤 3 若 $d_k = 0$,则 x^k 为线性规划最优解。否则转步骤 4;

步骤 4 令 λ_k 为 $(\lambda_k \geqslant 0)$

$$\max \quad \lambda$$

$$\text{s. t} \quad x^k + \lambda d_k \in R$$

的最优解,若 $\lambda_k = +\infty$,则线性规划无有限最优解。否则令 $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$, $k:=k+1$转步骤 2

性质 1 当 $d_k \neq 0$, d_k 为线性规划的可行下降方向。

证明 当 $d_k \neq 0$,则或 $p_k C \neq 0$, $F_k \neq 0$,故

$$C^T d_k = C^T(-P_k C + \_{k} B_k^T F_k) =$$

$$-\| P_k C \|^2 + \_{k} C^T B_k^T F_k = -\| P_k C\|^2 - \_{k} F_k^T F_k < 0 \tag{2}$$

因此, d_k 为下降方向。由于 $H_k(-P_k C + B_k^T F_k) = F_k$,故当 $i \in I$时, $a_i^T(x^k + \lambda d_k) = a_i^T x^k + \lambda a_i^T d_k = b_i$;当 $j \in J_0(x^k)$时, $a_i^T(x^k + \lambda d_k) = a_i^T x^k + \lambda a_i^T d_k = b_i + \lambda(F_k)_i = b_i + \lambda(u_i)_+ \geqslant b_i$;当 $i \in L(x^k)$时, $e_i^T(x^k + \lambda d_k) = x_i^k + \lambda + \lambda(w_i)_+ = 0 + \lambda(w_i)_+ \geqslant 0$;当 $i \notin (I \cup J_0(x^k) \cup L(x^k))$时,显然存在适当小的 $\lambda > 0$,使得相应的约束不会被破坏,故 d_k 为线性规划的可行下降方向。

性质 2 $C^T \dfrac{d_k}{\| d_k \|} \leqslant -\| P_k C \|$

证明
$$C^T \frac{d_k}{\| d_k \|} = \frac{-\| P_k C\|^2 - \_{k} F_k^T F_k}{(\| P_k C\|^2 + \_{k}^2 F_k^T B_k B_k^T F_k)^{1/2}} = \frac{-(\| P_k C\|^2 + \_{k} F_k^T F_k)}{\left(\| P_k C\|^2 + \_{k} \dfrac{F_k^T F_k F_k^T B_k B_k^T F_k}{F_k^T B_k B_k^T F_k + 1}\right)^{1/2}} =$$

$$-(\| P_k C\|^2 + \_{k} F_k^T B_k B_k^T F_k)^{1/2} - \_{k} \frac{F_k^T F_k}{\| d_k\| (F_k^T B_k B_k^T F_k + 1)} \leqslant -\| P_k C\|$$

定理 1 x^k 为线性规划 (P)的最优解的充要条件, $d_k = 0$。

证明 由式(2), $C^T d_k = -\| P_k C\|^2 - \_{k} F_k^T F_k \leqslant 0$, $-\_{k} \geqslant 0$,则当 $d_k = 0$时, $P_k C = 0$, $F_k = 0$,因此 $u_i \leqslant 0$, $i \in J_0(x^k)$, $w_i \leqslant 0$, $i \in L(x^k)$,由 $P_k C = 0$则有

$$(E - H_k^T(H_k H_k^T)^{-1} H_k) C = C - H_k^T B_k C = C + H_k^T \begin{pmatrix} V \\ U \\ W \end{pmatrix} =$$

$$C + \sum_{i \in I} v_i a_i + \sum_{i \in J_0(x^k)} u_i a_i + \sum_{i \in L(x^k)} w_i e_i = 0 \tag{3}$$

故 x^k 为 (P)的 $k-T$点,即为 (P)的最优解。

反之,当 x^k 为 (P)的最优解时,则 x^k 为 (P)的 $k-T$点,即存在 V, U, W,且 $U \leqslant 0$, $W \leqslant 0$有

$$C + \sum_{i \in I} v_i a_i + \sum_{i \in J_0(x^k)} u_i a_i + \sum_{i \in L(x^k)} w_i e_i = 0$$

即
$$C + H_k^T \begin{pmatrix} V \\ U \\ W \end{pmatrix} = 0$$

因此
$$-B_k C = B_k H_k^T \begin{pmatrix} V \\ U \\ W \end{pmatrix} = (H_k H_k^T)^{-1} H_k H_k^T \begin{pmatrix} V \\ U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ U \\ W \end{pmatrix}$$

$$C + H_k^T(-B_kC) = C - H_k^T(H_kH_k^T)^{-1}H_kC = P_kC = 0$$

由 F_k 的定义知，$F_k=0$，从而有 $d_k=0$。

3 算法有限步终止的证明

由于构造 P_k 的特性，不同的 d_k 只有有限个。若由算法得到一无限点列 $\{x^k\}k=1,2,3,\cdots$，由于不同的搜索方向只有有限个，则存在正整数 $\bar{k}$ 使得在子序列 $\{x^k\}, k\geqslant\bar{k}$ 中所出现的方向，将会无限次出现。设这些无限次出现的方向为 $d^1,d^2,\cdots d^r$，不失一般性，可设其还满足

$$C^T\frac{d^1}{\|d^1\|}\geqslant\cdots\geqslant C^T\frac{d^r}{\|d^r\|} \tag{4}$$

且

$$d_{\bar k}=d^1 \tag{5}$$

由于 d^1 将出现无限次，则存在 $k^*\geqslant\bar k$，$d_{k^*}=d^1$，现考查折线 $x_{\bar k}x_{\bar k+1}x_{\bar k+2}\cdots x_{k^*}$：

$$\begin{aligned}
C^Tx_{k^*}-C^Tx_{\bar k} &= C^T(x_{k^*}-x_{k^*-1})+C^T(x_{k^*-1}-x_{k^*-2})+\cdots+C^T(x_{\bar k+1}-x_{\bar k})=\\
&C^T\lambda_{k^*-1}d_{k^*-1}+C^T\lambda_{k^*-2}d_{k^*-2}+\cdots+C^T\lambda_{\bar k}d_{\bar k}=\\
&C^T\frac{d_{k^*-1}}{\|d_{k^*-1}\|}\lambda_{k^*-1}\|d_{k^*-1}\|+C^T\frac{d_{k^*-2}}{\|d_{k^*-2}\|}\lambda_{k^*-2}\|d_{k^*-2}\|+\cdots+C\frac{d_{\bar k}}{\|d_{\bar k}\|}\lambda_{\bar k}\|d_{\bar k}\|\leqslant\\
&C^T\frac{d_{\bar k}}{\|d_{\bar k}\|}(\lambda_{k^*-1}\|d_{k^*-1}\|+\lambda_{k^*-2}\|d_{k^*-2}\|+\cdots+\lambda_{\bar k}\|d_{\bar k}\|)\leqslant\\
&-\|p_kC\|L_d
\end{aligned} \tag{6}$$

这里 L_d 表示折线 $x_{\bar k}x_{\bar k+1}\cdots x_{k^*}$ 的长度。

而

$$\begin{aligned}
C^Tx_{k^*}-C^Tx_{\bar k} &= C^T(x_{k^*}-x_{\bar k})=C^TP_{\bar k}(x_{k^*}-x_{\bar k})=(P_{\bar k}C)^T(x_{k^*}-x_{\bar k})\geqslant\\
&-\|P_{\bar k}C\|\,\|x_{k^*}-x_{\bar k}\|
\end{aligned} \tag{7}$$

由于 $L_d>\|x_{k^*}-x_{\bar k}\|$，从而可得 $C^Tx_{k^*}-C^Tx_{\bar k}<C^Tx_{k^*}-C^Tx_k$，矛盾，因此算法必有限步终止。

参 考 文 献

1 马仲著.线性规划最新进展.北京：科学出版社，1994

2 Bazaraa M S, Jarris John J. Liner programming and network flows. New York：1977

3 徐成贤，何尚录.解线性规划问题的的梯度投影法.高校应用数学学报，1993，8(2)：111～129

4 Guangzhong He Rosen's gradient projection method with discrete steps ACTA Math. Application Sinica Jan, 1990, 6(1)：1～10

A Gradient Projection Method for Linear Programming

He Guangzhong

(Dept. of Applied Math, Sichuan Union Univ　Chengdu　610065)

Chen Huafu

(Appliecl Math., UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　The karmarkar algorithm is one kind of ploynomial method of solving the linear programming, but it has the deteat that the fruit is not stable. Meanwhile, for the method is belonging to the inner point algorithm, the point get at the termination step is always approximately optimal. The gradient project method given in this paper can go thronghthe inner part or the relative inner part of the boundary of area. It is also proved that the method will terminate at limit step in this paper.

Key words　linear programmming;　gradient projection;　terminate at limit step;　inner part area

编辑　徐培红