

计算复杂场域静电场问题的多极理论

郑勤红*

(电子科技大学应用物理所 成都 610054)

【摘要】 从分段圆弧边界、分片球面边界条件下静电场分析的多极理论通解出发, 推导出复杂场域静电场边值问题的多极理论通解, 和能用多极理论解析求解的边界形状参数及其使用规则, 并通过两个实例计算验证其正确性。计算结果表明, 多极理论的计算精度是相当高的。

关键词 多极理论; 内极; 外极; 静电场; 复杂场域

中图分类号 TM 151; TN 01; O 441.1

文献[1]建立了分段圆弧边界条件下二维静电场分析的多极理论, 证明或解释了广义多极技术中不能证明或解释的若干使用规则, 推导出分段圆弧边界条件下多极理论通解的数学表达式及其使用规则, 并得出多极理论的最佳适用条件是边界由圆弧或分段圆弧所组成的场域的结论。除边界由圆弧或不同半径的分段圆弧所组成的静电场边值问题外, 还存在着大量边界由若干段直线所组成的多边形或混合型(边界由直线、圆弧等组成)二维有界场域边值问题; 同时还存在着大量边界由若干个平面所组成的多面形或混合形(边界由平面、球面等组成)三维有界场域边值问题。对于这类边值问题, 文献[1]并没有证明其解的形式如何? 能否获得解析解? 如何处理等等。广义多极技术对这类问题的处理比较困难, 一方面, 在处理某些问题时, 根据经验只需在其场域内设置一个内极就能获得较好的结果^[2~4]; 另一方面, 在处理另外一些问题时, 又碰到了无法解释的现象——设置多个极比仅设置一个极其数值结果要好得多^[2,3], 且无法预知哪些问题只需设置一个极即可, 其原因何在? 哪些问题需要设置更多的极等等。本文在文献[1]的基础上, 通过严格的数学分析推导出复杂边界场域静电场边值问题的多极理论通解, 推导出能获得解析解的条件及其使用规则, 推导出只需设置一个极的条件, 推导出设置多个极的条件和极的个数, 并通过实例计算验证其正确性。

1 复杂场域静电场问题的多极理论

设有一如图 1 所示的二维复连通区域, 直线边界与圆弧边界在交点处的切线对场域所张的角 ϕ_{12} , 两条直线边界在交点处对场域所张的角 ϕ_{23} , 不同半径的圆弧边界在交点处的切线对场域所张的角 ϕ_{14} 等均称为内交角。在图 1 中, 外边界 l_0 由圆弧 l_{01} 、 l_{04} 、和直线 l_{02} 、 l_{03} 组成, 圆弧 l_{01} 的圆心位于 o_1 点, l_{04} 的圆心位于 o_4 点, 并假设直线 l_{02} (半径为无穷大的圆)的圆心位于 o_2 点, \vec{R}_{02} 为从定点 o_2 到定点 o_1 的矢径, \vec{r}_2 为从坐标原点 o 到定点 o_2 的矢径。

对于二维 Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$, 由 Green 定理可得图 1 中势函数 u 的积分解为

$$u = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^K \oint_{l_m} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \ln |\vec{r} - \vec{r}'| - u \frac{\partial}{\partial n} \ln |\vec{r} - \vec{r}'| \right] dl \quad (1)$$

式中 K 是闭合边界数; 变量 \vec{r} 是场点位置矢量; \vec{r}' 是源点位置矢量。式(1)中, 外边界 l_0 ($l_0 = l_{01} + l_{02} + l_{03} + l_{04}$) 对积分 u 的贡献为 u_0 , 令 $f(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\partial u}{\partial n} \ln |\vec{r} - \vec{r}'| - u \frac{\partial}{\partial n} \ln |\vec{r} - \vec{r}'|$,

$$\begin{aligned} \text{则 } u_0 &= -\frac{1}{2\pi} \oint_{l_m} f(\vec{r}, \vec{r}') dl = - \\ & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{l_{01}} + \int_{l_{02}} + \int_{l_{03}} + \int_{l_{04}} \right) f(\vec{r}, \vec{r}') dl = \\ & u_{01} + u_{02} + u_{03} + u_{04} \end{aligned} \quad (2)$$

由文献[1]的有关讨论可知, 当图1中的内交角 ϕ 均不大于 180° 时, 四条边界的积分解均满足有关展开条件, 直线边界 l_{02} 的积分解可展开为

$$u_{02} = -\frac{1}{2\pi} \int_{l_{02}} f(\vec{r}, \vec{r}') dl = A_{02} \ln r_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} r_{02}^{-n} (A_{02n} \cos n\theta_{02} + B_{02n} \sin n\theta_{02}) \quad (3)$$

式中 A_{02} , A_{02n} 和 B_{02n} 为待定常数; $r_{02} = |\vec{r}_2 - \vec{r}| = |\vec{R}_{02} - \vec{r}_i|$ 。

由于 l_{02} 为一段直线, 其半径为无穷大, 圆心 o_2 位于无穷远处, 所以外边界 l_{02} 的极点位于无穷远, 即 $r_{02} \rightarrow \infty$ 因此式(3)变为

$$u_{02} = A_{02} \ln r_{02}$$

在图1所示的整个有界场域范围内, 应该是 $|\vec{R}_{02}| > |\vec{r}_i|$, 由于公式 $\ln(1 + v^2 - 2v \cos \alpha) = -$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} v^n \quad (|v| < 1.0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi), \cos n\alpha = \cos n(\theta'_{02} - \theta_i), \text{ 而 } R_{02}, \theta'_{02} \text{ 为常量, 则}$$

$$\begin{aligned} u_{02} &= A_{02} \ln r_{02} = A_{02} \ln |\vec{R}_{02} - \vec{r}_i| = \\ & A_{02} \left[\ln R_{02} - \sum_{n=1}^{\infty} r_i^n \left(\frac{\cos n\theta'_{02}}{R_{02}^n} \cos n\theta_i + \frac{\sin n\theta'_{02}}{R_{02}^n} \sin n\theta_i \right) \right] = \text{第} \\ & A'_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} r_i^n (A'_{i2n} \cos n\theta_i + B'_{i2n} \sin n\theta_i) \end{aligned}$$

式中 A'_{02} , A'_{i2n} 和 B'_{i2n} 为待定的常数。

$$\text{同理可得 } u_{03} = A'_{03} + \sum_{n=1}^{\infty} r_i^n (A'_{i3n} \cos n\theta_i + B'_{i3n} \sin n\theta_i)$$

$$\text{由文献[1]可知 } u_{01} = A_i + \sum_{n=1}^{\infty} r_i^n (A'_{i1n} \cos n\theta_i + B'_{i1n} \sin n\theta_i)$$

$$u_{04} = A_{04} \ln r_{04} + \sum_{n=1}^{\infty} r_{04}^{-n} (A_{04n} \cos n\theta_{04} + B_{04n} \sin n\theta_{04})$$

将以上结果代入式(2), 并合并同类项可得

$$u_0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_i^n (A_{in} \cos n\theta_i + B_{in} \sin n\theta_i) + A_{04} \ln r_{04} + \sum_{n=1}^{\infty} r_{04}^{-n} (A_{04n} \cos n\theta_{04} + B_{04n} \sin n\theta_{04}) \quad (4)$$

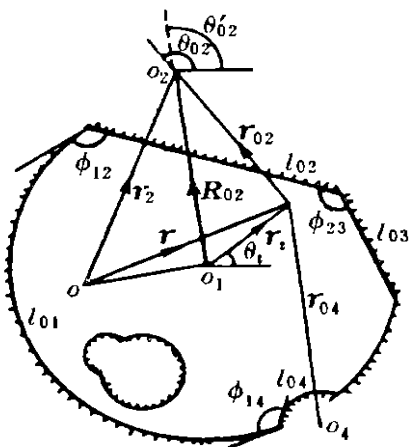


图1 二维复杂边界场域

对于式(1)中的其他边界,也可进行类似的处理,所以二维复杂场域静电场边值问题的多极理论通解为

$$u = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_i^n (A_{in} \cos n\theta_i + B_{in} \sin n\theta_i) + \sum_{p=1}^{N_0} [A_{0p} \ln r_{op} + \sum_{n=1}^{\infty} r_{op}^{-n} (A_{opn} \cos n\theta_{op} + B_{opn} \sin n\theta_{op})] \quad (5)$$

由式(5)可知,满足多极理论展开条件的边值问题,多极理论可获得其解析解。

在实际静电场数值计算中,式(5)中的级数项数不可能取无限多项,也没有必要取无限多项,所以二维复杂场域静电场边值问题,其多极理论通解与纯圆弧边界的多极理论通解一样,可表示为

$$\bar{u} = A_0 + \sum_{n=1}^{N_i} r_i^n (A_{in} \cos n\theta_i + B_{in} \sin n\theta_i) + \sum_{p=1}^{N_0} [A_{0p} \ln r_{op} + \sum_{n=1}^{N_{op}} r_{op}^{-n} (A_{opn} \cos n\theta_{op} + B_{opn} \sin n\theta_{op})] = \sum_{k=1}^N \alpha_k U_k \quad (6)$$

式中 $r_i = |\vec{r} - \vec{r}_{i1}|$; \vec{r}_{i1} 是内极的位置矢量; N_i 称为内极的个数; N_0 是外极的个数; $r_{op} = |\vec{r} - \vec{r}_{mok}|$; \vec{r}_{mok} 是第 p 个外极的位置矢量; N_{op} 称为第 p 个外极的个数; N 为总的级数项数。

对于 Poisson 方程 $\nabla^2 u = -\rho/\epsilon$, 式(6)可表示为

$$\bar{u} = U_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k U_k \quad (7)$$

式中 U_0 为 Poisson 方程的特解。

由以上讨论可见: 1) 满足多极理论展开条件的复杂场域边值问题,多极理论所获得的解(式(5))是一种解析解。而由式(6)可见,只有当 N_i, N_{op} 趋于无穷时,式(6)所得到的才是真正的解析解,但大量实例的实际计算结果表明,式(6)、(7)的收敛速度是相当快的,对于圆弧边界,无论是内极还是外极,只要其极的个数取到 6 左右,其势函数和场强的误差一般均不超过左右 1%; 对于直线型边界,从其物理意义上看,相当于无穷远处的多极子对场的贡献,所以其收敛速度相对慢一些,比圆弧边界慢 3~6 倍,亦即对于直线型边界,若要使其势函数和场强的误差不大于 1%,其极的个数一般要取到 20~40。2) 由式(4)的推导过程可知,若某个有界场域边值问题的边界仅由一段内凹的圆弧(如图 1 中的 l_{01})和满足内交角均不大于 180° 的多段直线边界所组成,则仅需要在其圆弧圆心处设置一个内极即可;反之,则需要在场域外设置对应于内凸圆弧(如图 1 中的 l_{04})段数的极,亦即有多少段不同半径或不同圆心的内凸的圆弧,就需要在其圆心处设置对应个数的外极。3) 多极理论通解的展开条件是组成场域的各段边界间其内交角均不大于 180° 。对于内交角大于 180° 的边界,可采用耦合法或准解析法进行求解,对于这类问题的处理已另立文讨论。

对于三维问题也可作类似处理,并获得类似的结论,这里不再重述(可参见文献[5])。

2 应用边界条件确定待定常数

设有下列定解问题

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= f(x, y) & x, y \in \Omega \\ u \Big|_{\Gamma_1} &= g(x, y) & x, y \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= q(x, y) & x, y \in \Gamma_2 \quad \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其多极理论解与式(7)相同,即

$$\bar{u} = U_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k U_k \tag{9}$$

由电磁场的唯一性定理可知,根据定解问题(8)中的边界条件,可确定出式(9)中所有待定常数 α_k 。在本文中,采用最小二乘法来确定其待定常数,即通过使多极理论解与给定边界值之间误差的平方沿边界积分最小来确定式(9)中的待定常数。

由于 $E_{rr} = \int_{\Gamma_1} (\bar{u} - g)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + \alpha \bar{u} - q \right)^2 d\Gamma$, 由 $\frac{dE_{rr}}{d\alpha_m} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N)$ 可得

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \left[\int_{\Gamma_1} U_k U_m d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial n} + \alpha U_k \right) \left(\frac{\partial U_m}{\partial n} + \alpha U_m \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (g - U_0) U_m d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \left(q - \frac{\partial U_0}{\partial n} - \alpha U_0 \right) \left(\frac{\partial U_m}{\partial n} + \alpha U_m \right) d\Gamma \right] = 0 \tag{10}$$

式(10)中方程的个数刚好与未知数个数相等,所以可由式(10)确定所有的待定常数 α_m ,亦即获得定解问题(8)的多极理论解。

3 实例计算

例 1 如图 2 所示,有一二维静电场边值问题,边界由一段 $x = a = 1.0 \text{ m}$ 的直线和 $x = y^2$ 的抛物线围成,其定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega \\ u|_{\text{抛物线}} = 0 \\ u|_{x=1.0} = 10.0 \text{ V} & \in \Gamma \end{cases} \tag{11}$$

称为

求场域中的场分布。

由于边界由一段直线和可以剖分为若干段直线单元的抛物线组成,且其内交角均小于 180° ,由前面的有关讨论可知,只需在场域内设置一个次数较高的内极即可。在场域对称几何中心点(0.5, 0)设置一个内极,取极的次数 $N_i = 20$,由于场分布对 x 轴具有偶对称性,由式(6)可知,级数总项数为 21 项,其多极理论

解为

$$\bar{u} = A_0 + \sum_{n=1}^{20} A_n r^n \cos n\theta = \sum_{k=1}^{21} \alpha_k U_k \tag{12}$$

用前面所述的最小二乘法,由边界条件确定出式(12)中的 21 个待定常数后,即可获得定解问题式(11)的多极理论解。由于本例无解析可以比较,而在数值解中,直接边界元法的计算精度是相当高的,故将边界剖分成 65 个常数单元进行计算,部分场点的计算结果见表 1(当 $y = 0$ 时, E_y 的理论值为 0)。

由表 1 可见,多极理论的计算结果与边界元的计算结果完全一致,且两种方法所花费的计算时间也基本相等。如果增加极的次数,多极理论的计算精度将会更高。

例 2^[6] 图 3 是一个三维单连通场域静电场边值问题,其定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = 100 \text{ sh} \frac{\pi}{8c} (a - x) \text{ sh} \frac{\pi}{8c} (b - y) \cos \frac{\pi z}{\sqrt{32}c} \Big|_{\substack{x=0, a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \\ y=0, b, 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c \\ z=0, c, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b}} \end{cases} \tag{13}$$

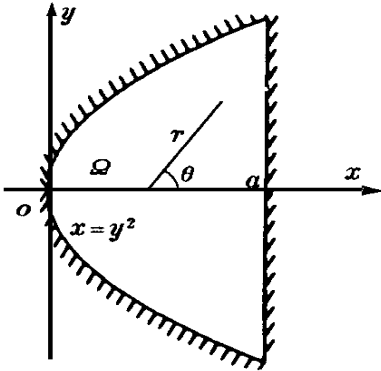


图 2 二维单连通复杂边界

式中 $a=0.13\text{ m}$, $b=0.13\text{ m}$, $c=0.06\text{ m}$, u 的单位为 V。

表 1 电位、场强计算结果

坐标/m		边界元			多极理论		
x	y	u/V	$E_x/\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$	$E_y/\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$	u/V	$E_x/\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$	$E_y/\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$
0.2	0	1.134	-6.74	3.2×10^{-7}	1.192	-6.812	-3.8×10^{-6}
0.4	0	2.714	-9.08	1.3×10^{-6}	2.755	-8.945	-6.8×10^{-7}
0.6	0	4.768	-11.43	1.2×10^{-6}	4.786	-11.330	0
0.8	0	7.252	-13.27	1.1×10^{-6}	7.252	-13.170	0
1.0	0	10.000	-14.03	0	9.985	-14.030	0
0.8	-0.8	2.656	-23.58	-22.25	2.708	-21.320	-22.81
0.8	-0.4	6.618	-15.83	-3.68	6.636	-15.950	-3.65
0.8	0.4	6.618	-15.83	3.68	6.636	-15.950	3.654
0.8	0.8	2.656	-23.58	22.25	2.708	-21.320	22.81

这是一个边界由 6 个平面组成的三维单连通场域, 各平面之间的内交角均不大于 180° , 根据文献[5]的讨论, 只需在场域内设置一个次数较高的内极即可。在场域的几何中心点 $(0.065, 0.065, 0.03)$ 设置了一个内极, 取极的次数 $N_i=8$, 则级数总项数为 81 项, 其多极理论解为

$$\bar{u} = A_0 + \sum_{l=1}^8 r^l [A^l P_l(\cos\theta) + \sum_{m=1}^l P_l^m(\cos\theta)(A^{lm} \cos m\phi + B^{lm} \sin m\phi)] = \sum_{k=1}^{81} \alpha_k U_k$$

(14)

采用与例 1 相同的方法由边界条件确定出式(14)中的 81 个待定常数 α_k 后, 即可获得本例的多极理论解。用所获得的多极理论解计算了部分场点的场强, 见表 2、3 ($\vec{E} = -\nabla\bar{u}$)。

由表 2、3 (由于文献[6]中的表 2 给出的计算结果有误, 故表 3 中未列出互补变分法的计算结果)可见, 互补变分法场强的最大计算误差为 19.74%, 多极理论的最大计算误差为 0.039%, 对于表 2、3 所列出的 24 个场点, 多极理论的电位最大计算误差为 0.086% (表中未列出)。如果增加极的次数, 其精度将会更高。

4 结 论

1) 对于边界由直线或由直线、圆弧等组成的二维复杂场域边值问题; 边界由平面或由平面、球面等组成的复杂三维问题, 若其内交角不大于 180° , 则存在多极理论解析解。随着极的次数的增加, 多极理论近似解以较快速度收敛于准确解。

2) 若某个有界场域边值问题的边界仅由一段内凹的圆弧和满足内交角均不大于 180° 的多段直线边界组成, 则仅需要在其圆弧圆心处设置一个内极即可; 反之, 则需要在场域外设置对应于内凸圆弧段数的极, 亦即有多少段不同半径或不同圆心的内凸的圆弧, 就需要在其圆心处设置对应个数的外极。

3) 多极理论突破了传统解析解对边界形状的限制, 将解析解的范围扩大到复杂的分段圆弧边界、多边形边界、多球面边界、多平面边界等复杂边界。

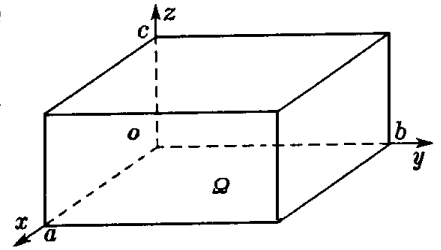


图 3 三维单连通场域

表 2 场强 E_z 沿 x 轴方向的变化情况

x/m	解析法		多极理论		互补变分法	
	场强 $/V \cdot m^{-1}$	场强 $/V \cdot m^{-1}$	误差 $/(\%)$	场强 $/V \cdot m^{-1}$	误差 $/(\%)$	场强 $/V \cdot m^{-1}$
0	85.316	85.312	0.005	93.050	9.06	
0.01	77.418	77.416	0.003	70.384	9.09	
0.02	69.852	69.851	0.002	71.957	3.01	
0.03	62.585	62.585	0	56.710	9.39	
0.04	55.587	55.586	0.002	57.247	2.99	
0.05	48.826	48.826	0	57.247	2.99	
0.06	42.275	42.275	0	43.536	2.98	
0.07	35.905	35.905	0	32.519	9.43	
0.08	29.689	29.689	0.000	30.575	2.98	
0.09	23.600	23.600	0.000	21.355	9.51	
0.11	11.700	11.698	0.013	10.481	10.42	
0.12	5.837	5.835	0.039	4.685	19.74	

注: $y=0.01$ m, $z=0.012$ m表 3 场强 E_z 沿 y 轴方向的变化情况

y/m	解析法		多极理论	
	场强 $/V \cdot m^{-1}$	场强 $/V \cdot m^{-1}$	误差 $/(\%)$	场强 $/V \cdot m^{-1}$
0	24.944 1	24.949	0.020	
0.01	22.634 9	22.637	0.009	
0.02	20.422 8	20.423	0.001	
0.03	18.298 2	18.298	0.001	
0.04	16.252 0	16.251	0.006	
0.05	14.275 4	14.274	0.010	
0.07	10.497 6	10.497	0.006	
0.08	8.680 1	8.680	0.002	
0.09	6.899 9	6.900	0.002	
0.10	5.149 2	5.149	0.004	
0.11	3.420 6	3.421	0.012	
0.12	1.706 6	1.707	0.021	

注: $x=0.12$ m, $z=0.048$ m

参 考 文 献

- 1 郑勤红, 盛剑霓, 解福瑶等. 二维静态电场分析的多极理论. 电工技术学报, 1996, 11(5): 28~31
- 2 Ballisti R, Hanfer C. The multiple multipole method (MMP) in electron and magnetostatic problems. IEEE Trans Magnetics 1983, 19(6): 367~2 370
- 3 Hanfer C. MMP calculations of guided waves. IEEE Trans Magnetics 1985, 21(6): 2 310~2 312
- 4 Ma Qishuang, Gao Ge, Sheng Jianni. Introducing a general analytical method for solving electromagnetic fields with complicated boundary. IEEE Trans Magnetics 1994, 30(5): 2 920~2 923
- 5 郑勤红. 电磁场分析中的多极理论及其应用研究. [学位论文], 西安: 西安交通大学, 1996
- 6 黄 键, 谭邦定, 俞集辉. 用互补变分法计算一个新的三维静电场模型. 重庆大学学报, 1991, 14(3): 9~15

Multipole Theory of Computation Electrostatic Field Problems with Complicated Field Domain

Zheng Qinrong

(Institute of Applied Physics UEST of China Chengdu 610054)

Abstract This paper deduces the MT (Multipole Theory) general solution formula of computation electrostatic field problems with the complicated field domain, from the MT general solution formula of the special electrostatic field computation. The boundary shape parameter is also deduced and the laws under which an analytical solution can be obtained by the MT is introduced. The MT general solution formula is used to calculate two examples for checking its calculation precision. It is shown that the MT has a lot of merits.

Key words multipole theory; inside pole; outside pole; electrostatic field; complicated field domain

编辑 黄 辛