模糊一致关系及其应用*

姚　敏**　　黄燕君
（杭州大学计算机系　杭州　310028）（杭州大学金融系　杭州　310028）

【摘要】提出了一种满足中分传递性的模糊一致关系，从而符合人们决策思维的心理特性。当论域是有限的时候，模糊一致关系可以用模糊一致矩阵来表示。讨论了模糊一致关系的合成运算以及模糊一致关系的建立方法，并简要说明了模糊一致关系在系统评价中的应用。

关　键　词　模糊一致关系；　模糊一致矩阵；　中分传递性；　系统评价
中图分类号　TP18

1　模糊一致关系及其主要性质

定义 1　设有论域 $U=\{u_i \mid i\in I\}$，$I=\{1, 2, \cdots\}$为指标集，称直积 $U\times U$ 上的一个模糊子集

$$R: U\times U \to [0, 1]$$

或

$$R=\sum_{(i,j)}\frac{\mu_R(u_i, u_j)}{(u_i, u_j)}$$

为 U 中的(二元)模糊关系。

定义 2　设 R 是 U 中的模糊关系，若对任意 $u_i\in U$，$u_j\in U$，都有

$$\mu_R(u_i, u_j)=\mu_R(u_i, u_k)-\mu_R(u_j, u_k)+0.5 \qquad \forall k\in I \tag{1}$$

则称 R 为模糊一致关系。

例如，在系统评价中，模糊一致关系 R 通常表示对象论域 U 中第 i 个对象 u_i 与第 j 个对象 u_j 的相对重要性(或相对优越性)程度：

1）$\mu_R(u_i, u_j)=0.5$，表示 u_i 与 u_j 同样重要；

2）$0\leqslant\mu_R(u_i, u_j)<0.5$，表示 u_j 比 u_i 重要，且 $\mu_R(u_i, u_j)$越小，u_j 比 u_i 越重要；

3）$0.5<\mu_R(u_i, u_j)\leqslant 1$，表示 u_i 比 u_j 重要，且 $\mu_R(u_i, u_j)$越大，u_i 比 u_j 越重要。

定理 1　模糊一致关系 R 满足中分传递性，即：

（1）当 $\lambda\geqslant 0.5$ 时，若 $\mu_R(u_i, u_j)\geqslant\lambda$，$\mu_R(u_j, u_k)\leqslant\lambda$，有 $\mu_R(u_i, u_k)\geqslant\lambda$；

（2）当 $\lambda\leqslant 0.5$ 时，若 $\mu_R(u_i, u_j)\leqslant\lambda$，$\mu_R(u_j, u_k)\leqslant\lambda$，有 $\mu_R(u_i, u_k)\leqslant\lambda$。

证明　由定义 2，$\mu_R(u_i, u_j)=\mu_R(u_i, u_k)-\mu_R(u_j, u_k)+0.5$。

（1）$\lambda\geqslant 0.5$ 时，由给定条件，有

$$\mu_R(u_i, u_j)=\mu_R(u_i, u_j)+\mu_R(u_j, u_k)-0.5\geqslant$$
$$\lambda+\lambda-0.5\geqslant\lambda$$

1997年4月8日收稿
* 浙江省自然科学基金资助项目
** 男　42岁　博士　副教授

（2）$\lambda \leqslant 0.5$ 时，由给定条件，有

$$\mu_R(u_i, u_k) = \mu_R(u_i, u_j) + \mu_R(u_j, u_k) - 0.5 \leqslant \lambda + \lambda - 0.5 \leqslant \lambda$$

模糊一致关系的中分传递性符合人们决策思维的心理特性，即有：

（1）当 $\lambda \geqslant 0.5$ 时，若 u_i 比 u_j 重要[$\mu_R(u_i, u_j) \geqslant \lambda$，$u_j$ 比 u_k 重要[$\mu_R(u_j, u_k) \geqslant \lambda$]，则必有 u_i 比 u_k 重要[$\mu_R(u_i, u_k) \geqslant \lambda$]；

（2）当 $\lambda \leqslant 0.5$ 时，若 u_i 不比 u_j 重要[$\mu_R(u_i, u_j) \leqslant \lambda$]，$u_j$ 不比 u_k 重要[$\mu_R(u_j, u_k) \leqslant \lambda$]，则必有 u_i 不比 u_k 重要[$\mu_R(u_i, u_k) \leqslant \lambda$]。

定义 3　设 R 是有限论域 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 上的模糊一致关系，则模糊一致关系 R 可以用模糊矩阵（仍记为 R）来表示，即

$$R = (r_{ij})_{m \times m} \qquad r_{ij} = \mu_R(u_i, u_j)$$

显然，模糊矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times m}$ 满足 $r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$。则满足上述关系的模糊矩阵称为模糊一致矩阵。模糊一致矩阵满足中分传递性。

2　模糊一致关系的合成运算

定义 4　设 $R^l (l = 1, 2, \cdots, n)$ 是 U 中的 n 个模糊一致关系，令

$$\mu_R(u_i, u_j) = \sum_{l=1}^{n} w_l \mu_{R^l}(u_i, u_j) \tag{2}$$

$$\sum_{l=1}^{n} w_l = 1 \tag{3}$$

则称模糊关系 R 为 $R^l (l = 1, 2, \cdots, n)$ 的合成，记作

$$R = R^l \oplus R^2 \oplus \cdots \oplus R^n \tag{4}$$

定理 2　设 $R^l (l = 1, 2, \cdots, n)$ 是 U 中的 n 个模糊一致关系，模糊关系 R 是 $R^l (l = 1, 2, \cdots, n)$ 的合成，即

$$R = R^l \oplus R^2 \oplus \cdots \oplus R^n$$

那么，R 也是模糊一致的。

证明
$$\begin{aligned}\mu_R(u_i, u_j) &= \sum_{l=1}^{n} w_l \mu_{R^l}(u_i, u_j) = \sum_{l=1}^{n} w_l [\mu_{R^l}(u_i, u_k) - \mu_{R^l}(u_j, u_k) + 0.5] = \\ &\sum_{l=1}^{n} w_l \mu_{R^l}(u_i, u_k) - \sum_{l=1}^{n} w_l \mu_{R^l}(u_j, u_k) + 0.5 \sum_{l=1}^{n} w_l = \\ &\mu_R(u_i, u_k) - \mu_R(u_j, u_k) + 0.5\end{aligned}$$

模糊一致关系合成运算的意义在于：它可以将群体的决策结果，即多个模糊一致关系有效地综合起来，从而形成总体模糊一致关系。

3　模糊一致关系的建立

定义 5　设 B 是 U 中的模糊关系，若对任意 $u_i \in U$，$u_j \in U$，都有

$$\mu_B(u_i, u_j) + \mu_B(u_j, u_i) = 1 \tag{5}$$

则称 B 为模糊互补关系。

定理 **3**　有限论域 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 中的模糊一致关系是模糊互补关系。

证明　设 R 是有限论域 U 中的模糊一致关系，有

$$\mu_R(u_i, u_j)+\mu_R(u_j, u_i)=\mu_R(u_i, u_k)-\mu_R(u_j, u_k)+0.5+\mu_R(u_j, u_k)-\mu_R(u_i, u_k)+0.5=1$$

故 R 为模糊互补的。

显然,模糊互补关系并不一定是模糊一致关系。因此,模糊互补关系就不满足模糊一致关系的重要特性,即中分传递性。然而,模糊互补关系的建立却比较简单。人们在日常工作和日常生活的决策过程中所建立的关系往往就是一个模糊互补关系。此时,就需要有适当的算法将模糊互补关系转换成模糊一致关系,因而有下面的定理4。

定理4 设 B 是有限论域 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 中的模糊互补关系,令

$$r_i=\sum_{k=1}^{m}\mu_B(u_i, u_k) \tag{6}$$

$$\mu_R(u_i, u_j)=[(r_i-r_j)/2m]+0.5 \tag{7}$$

则由此而构造的模糊关系 R 为模糊一致关系。

证明 (1) $\mu_R(u_i, u_j)+\mu_R(u_j, u_i)=[(r_i-r_j)/2m]+0.5+[(r_j-r_i)/2m]+0.5=1$

故 R 为模糊互补的。

(2) $\mu_R(u_i, u_j)=[(r_i-r_j)/2m]+0.5=[(r_i-r_k+r_k-r_j)/2m]+0.5+0.5-0.5=$

$[(r_i-r_k)/2m]+0.5-\{[(r_j-r_k)/2m]+0.5\}+0.5=$

$\mu_R(u_i, u_k)-\mu_R(u_j, u_k)+0.5$

因而,R 为模糊一致的。

4 模糊一致关系的应用

正是模糊一致关系的特殊性质使得模糊一致关系的概念符合人类决策思维的一致性,因此,模糊一致关系可以在诸如模糊相似选择、模糊综合评判、层次分析法、权重分析、系统分析与系统评价等方面得到广泛的应用。限于篇幅,此处仅简要介绍模糊一致关系在系统评价中的应用。

4.1 单目标评价

设有对象论域 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$,其中 u_i 为第 i 个待评价对象,则评价过程如下:

1) 建立个体评价关系

(1) 建立 U 中的模糊优先关系

$$B^l: \mu_{B^l}(u_i, u_j) \qquad l=1, 2, \cdots, n$$

其中 $\mu_{B^l}(u_i, u_j)=1.0$,如果 u_i 优于 u_j;$\mu_{B^l}(u_i, u_j)=0.5$,如果 u_i 与 u_j 等优;$\mu_{B^l}(u_i, u_j)=0.0$,如果 u_i 劣于 u_j。模糊优先关系满足定义5中的条件,因而是模糊互补关系。

(2) 利用定理4将模糊优先关系 B^l 改造成模糊一致关系 R^l。

2) 建立群体评价关系

对 n 个个体评价关系 R^l 取合成运算,从而获得模糊一致的群体评价关系

$$R=R^1\oplus R^2\oplus\cdots\oplus R^n$$

3) 优劣排序

借助方根法[1] 计算各对象的优度值 w_i $i=1, 2, \cdots, m$

致 关

$$w_i=\left[\prod_{j=1}^{m}\mu_R(u_i, u_j)\right]^{1/m} \tag{8}$$

将各对象的优度值 w_i 从大到小排列,就得到了 n 个对象从优到劣的次序。

4.2　多目标评价

多目标评价的基本步骤如下:(1) 建立模糊优先关系;(2) 将模糊优先关系改造成模糊一致关系;(3) 单目标排序;(4) 多目标总排序。其中(1)、(2)和(3)与单目标评价过程相同, 而(4)则是在单目标排序的基础上, 计算诸对象的总体优度值 T_i

$$T_i = \sum_{k=1}^{p} w_k s_i^k \tag{9}$$

其中 s_i^k 为对象 u_i 在目标 O_k 下的优度值。按 T_i 的大小可对诸对象进行总体排序, 即若 $T_{i_1} \geqslant T_{i_2} \geqslant \cdots T_{i_m}$, 则诸对象从优到劣的次序为

$$u_{i_1} \geqslant u_{i_2} \geqslant \cdots \geqslant u_{i_m}$$

5　结 束 语

根据前面的讨论与分析, 可得如下结论:

(1) 正是模糊一致关系的优良特性, 特别是中分传递性, 使得模糊一致关系符合人类决策思维的心理特性;

(2) 模糊一致关系的合成可以合理地解决群体决策问题;

(3) 模糊一致关系可以在许多领域, 特别是决策领域得到广泛而有效的应用。

参 考 文 献

1　王众托. 系统工程引论. 北京:电子工业出版社, 1984

2　王登瀛. 多目标决策方案优选的相似优序值法. 系统工程, 1992, 10(1):48～54

3　汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海:上海科学技术出版社, 1983

4　汪培庄, 李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机. 北京:科学出版社, 1996

5　Turban E. Expert systems and applied artificial intelligence. NJ:Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1992

6　Kosko B. Nerual networks and fuzzy systems:a dynamic systems approach to machine intelligence. NJ:Englwood Cliffs Prentice Hall, 1992

Fuzzy Consistent Relation and Its Applications

Yao Min　　Huang Yanjun

(Dept. of Computer, Dept. of Finance, Hangzhou University　Hangzhou　310028)

Abstract　Fuzzy relation is one of the fundamental concepts in fuzzy set theory. This paper presents a kind of fuzzy consistent relation, which satisfies center-division ransitivity and thus conforms to the psychological characteristic of human decision making. When discourse is finite, fuzzy consistent relation may be described by fuzzy consistent matrix. The combined operation and construction of fuzzy consistent relation are discussed. Finally, the applications of fuzzy consistent relation in system evaluation are explained shortly.

Key words　fuzzy consistent relation;　fuzzy consistent matrix;　center-division transitivity; system evaluation

编辑　徐安玉