第27卷　第1期　　电子科技大学学报　　Vol.27　No.1
1998年2月　　Journal of UEST of China　　Feb. 1998

广义 *S*-A-proper 映射的拓扑度及其应用

何明星*
（四川工业学院基础部　成都　611744）

【摘要】 给出了广义 *S*-A-proper 映射的定义，建立了此类映射的拓扑度，证明了它具有一般拓扑度常有的性质，并由此给出了广义 P_1-紧映象的几个不动点定理，它们是一些经典不动点定理的推广。

关　键　词　A-proper 映射；　紧映象；　拓扑度；　不动点
中图分类号　O177.91

1　预备知识

设 X，Y 为实 Banach 空间，$D\subset X$ 是开集，∂D 表示其边界，$\bar{D}$ 是 D 的闭包。N 表示正整数集合。(X，Y)具有下面给出的逼近格式 Γ。

定义 1[1]　$\Gamma=\{X_n, P_n; Y_n, Q_n\}$ 称为(X，Y)的投影完备逼近格式，如果 Γ 满足下列条件：

1）$X_n\subset X$，$Y_n\subset Y$ 为有限维子空间，且 $\dim X_n=\dim Y_n$，$X_n\subset X_{n+1}$，$Y_n\subset Y_{n+1}$，$\forall n\in N$。

2）$\{P_n: X\to X_n\}$ 与 $\{Q_n: Y\to Y_n\}$ 是两列有界线性投影，使得 $P_n(x)\to x$，$Q_n(y)\to y$，$\forall x\in X, y\in Y$。特别地，当 $Y=X$，$Y_n=X_n$ 且 $Q_n=P_n$ 时，若 $\sup\limits_n\|P_n\|=\alpha<\infty$，则记 Γ 为 $\Gamma_\alpha=\{X_n, P_n\}$。

定义 2[2]　映射 $T: \bar{D}\to Y$ 称为关于给定逼近格式 $\Gamma=\{X_n, P_n; Y_n, Q_n\}$ 的广义 A-proper 映射，如果对任何 $\{n_i\}\subset N$，$n_j\to\infty$ 和 $x_{n_j}\in X_{n_j}$，有：

1）若 $P_{n_j}x_{n_j}\in\partial D$ 使得对某个 $P\in Y$ 且 $\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}P\|\to 0\ (n_j\to\infty)$，则存在 $x_0\in\partial D$，使得 $Tx_0=p$；

2）若 $P_{n_j}x_{n_j}\in\bar{D}$，对某个 $p\in Y$，$\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}p\|\to 0\ (n_j\to\infty)$，则 $x_0\in\bar{D}$，使得 $Tx_0=p$。

定义 3[1]　称 $T: \bar{D}\to Y$ 是 fa 连续的，如果对任何 $n\in N$，$T_n=Q_nTP_n$，$\bar{D}_n\subset X_n\to Y_n$ 是连续的，这里 $D_n=P_n^{-1}(D)$，(X，Y)具有逼近格式 $\Gamma=\{X_n, P_n; Y_n, Q_n\}$。

定义 4[2]　设 $T: \bar{D}\to Y$ 是 fa 连续的广义 A-proper 映射，$D_n=P_n^{-1}(D)$ 对任何 $n\in N$ 为有界集，若 $a\in Y\setminus T(\partial D)$，令 $Z'=Z\cup\{\pm\infty\}$（Z 是全体整数集合），则定义 T 关于 Γ 在点 a 相对于 D 的拓扑度为 $\deg(T, D, a)=\{\gamma \mid \gamma\in Z'\}$，存在 $\{n_j\}\subset N$，使得 $n_j\to\infty$ 时，$\deg(T_{n_j}, D_{n_j}, Q_{n_j}a)\to\gamma\}$，其中 $\deg(T_{n_j}, D_{n_j}, Q_{n_j}a)$ 是维数相同的有限空间 X_n，Y_n 上映射的 Brouwer 度。

对于定义 4 中建立的广义 A-proper 拓扑度有下面的定理。

定理 1[2]　设 $T: \bar{D}\to Y$ 是 fa 连续的关于 Γ 的广义 A-proper 映射，$D_n=P_n^{-1}(D)$，($\forall n\in N$)是有界集，$a\in Y\setminus T(\partial D)$，则有：

1）存在 $n_0\geqslant 1$，$n_0\in N$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时 $Q_na\notin T_n(\partial D_n)$，此时 $\deg(T_n, D_n, Q_na)\subset Z'$ 非空。

2）$\deg(T, D, a)\neq\{0\}$ 时，必存在 $x\in D$ 使得 $T_x=a$。

*　1997年7月1日收稿
*男　33岁　硕士　讲师

3)(强同伦不变性)若 $T: \bar{D}\times[0,1]\to Y$，$T_n: \bar{D}_n\times[0,1]\to Y_n$ 连续，且对任意 $t\in[0,1]$，$T_t(\cdot)=T(\cdot,t)$依 t 关于 $x\in\bar{D}$ 一致连续，Γ_t 是关于 Γ的广义 A-proper 映射，则对 $a\in Y\setminus T(\partial D\times[0,1])\deg(T_t,D,a)$与 $t\in[0,1]$ 无关。

4)(弱同伦不变性)设 $T: \bar{D}\times[0,1]\to Y$，$T_n: \bar{D}_n\times[0,1]\to Y_n$ 连续，对任意 $t\in[0,1]$，$T_t(\cdot)=T(\cdot,t)$是关于 Γ的广义 A-proper 映射，且存在$\{x_{nh}\in X_{nj}\}$，$P_{nj}x_{nj}\in\partial D$，$\{t_{nj}\}\subset[0,1]$ 使得 $\|Q_{nj}T(P_{nj}x_{nj},t_{nj})-Q_{nj}a\|\to 0(n_j\to\infty)$，则存在 $x\in\partial D$，$t\in[0,1]$，使得 $T(x,t)=a$。此外，若再设 $a\in Y\setminus T(\partial D\times[0,1])$则 $\deg(T_t,D,a)$与 $t\in[0,1]$ 无关。

5)如果 $D=D_1\cup D_2$，D_1，D_2 是 X 中的开集，$D'=(\partial D_1)\cup(\partial D_2)\cup(D_1\cap D_2)$且 $p\in Y\setminus T(D')$则 $\deg(T,D,p)\subseteq\deg(T,D_1,p)+\deg(T,D_2,p)$。

2 主要结果

定义 5 设 $S: \bar{D}\subset X\to Y$ 是有界映射，称 $T: \bar{D}\to Y$ 是对于给定逼近格式 Γ关于 S 的广义 S-A-proper 映射，如果对所有的 $\lambda>0$，T_λ: $T+\lambda S$ 是 Γ下的广义 A-proper 映射。

注(1) 令 S 为零映射，则任一广义 A-proper 映射 $T: \bar{D}\to Y$ 都可视为广义S-A-proper 映射。

注(2) 设 $G\subset X$为闭凸集，且 $\mathrm{Int}\,G\neq\phi$，$D\subset G$ 是 G 中任开子集，若 $D_n=P_n^{-1}(D)$有界且 $\|Q_n\|\leqslant C_0(\forall n\in N)$，如 T，S：$G\to Y$，T 是 fa 连续的关于 Γ的伪 A-proper 映射[3]，S 为有界全连续映射，则可以证明 T 是广义S-A-proper。以下我们用 $S_A(\bar{D})$记满足下面条件的广义 S-A-proper 映射 T 的集合：

(i) $T: \bar{D}\to Y$ 是关于 Γ的广义 S-A-proper 映射，且 $T_\lambda=T+\lambda S(\lambda>0)$是 fa 连续的。

(ii) 对 $\bar{D}$ 的任意闭子集 K 及 $p\in Y$，若存在$\{x_n\}\subset K$，$\lambda_n\to 0^+$，满足 $Tx_n+\lambda_n Sx_n=p$，则存在 $x\in K$，使得 $Tx=p$。

注(3) (i)中的连续性要求是自然的，而(ii)对于很多非线性映射也是自然满足的，但为后面讨论拓扑度性质时方便起见故作此假设(如无假设也可定义拓扑度)。

先给出两个引理：

引理 1 设 $T\in S_A(\bar{D})$，$K\subset\bar{D}$ 闭，$p\in Y\setminus T(K)$则存在 $\lambda^*>0$，使得 $p\notin T_\lambda(K)$，$\forall\lambda\in[0,\lambda^*)$。

证明 若不然，则存在 $\lambda_n\to O^+$ 及$\{x_n\}\subset K$，使得 $T\lambda_n(x_n)=p$，即 $T(x_n)+\lambda_n S(x_n)=p$。由条件(ii)，必存在 $x\in K$，使得 $p=T(x)$，这与 $p\in Y\setminus T(K)$矛盾。

引理 2 设 $T\in S_A(\bar{D})$，$p\in Y\setminus T(\partial D)$，则存在 $\lambda^*>0$，使得 $\deg(T_\lambda,D,p)$对 $\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$有意义且不依赖于其中 λ 的选择，这里 $\deg(T_l,D,p)$表示定义 4 中的广义拓扑度。

证明 由引理1，令 $K=\partial D$ 即知存在$\lambda^*>0$，使得$p\notin T_\lambda(\partial D)$，$\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$。注意 $T\in S_A(\bar{D})$，由(i)，T_λ 是 fa 连续的，由定义 4 知 $\deg(T_\lambda,D,p)$对 $\forall\lambda(0,\lambda^*)$有意义。

任取 λ_1，$\lambda_2\in(0,\lambda^*)$，考虑

$$H_t(x)=tT_{\lambda_1}(x)+(1-t)T_{\lambda_2}(x),\quad\forall(t,x)\in[0,1]\times\bar{D}$$

即

$$H_t=T+(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2)S$$

因 $t\lambda_1+(1-t)\lambda_2\in(0,\lambda^*)$，由(i)知 $H_t: \bar{D}\to Y$，fa 连续，$p\notin H([0,1]\times\partial D)$。又 $S: \bar{D}\to Y$ 是有界映射，因而 $H_t(x)$依 t 关于 $x\in\bar{D}$ 一致连续，于是根据广义 A-proper 映射的强同伦不变性

(定理 1.3)知[3]

$$\deg(H_1, D, p) = \deg(H_0, D, p)$$

即

$$\deg(T_{\lambda_1}, D, p) = \deg(T_{\lambda_2}, D, p)$$

定义 6　设 $T\in S_A(D)$, $p\in Y\setminus T(\partial D)$, $\lambda^*>0$ 如引理 2 中所取, 定义 $\mathrm{Deg}_S(T, D, p)=\deg(T_\lambda, D, p)(\lambda\in(0, \lambda^*))$为 T 的广义 S-A-proper 拓扑度。

由引理 1、2 知上面定义的拓扑度是确定的, 且下面的定理保证它具有一般拓扑度常有的性质。

定理 **2**　设 $T\in S_A(D)$, $p\in T(\partial D)$, 则下列结论成立:

1) 如果 $\mathrm{Deg}_S(T, D, p)\neq\{0\}$, 则存在 $x\in D$, 使得 $Tx=p$。

2) 设 H: $[0,1]\times \bar{D}\to Y$ 依 t 对 $x\in\bar{D}$ 一致连续, $H_t=H(t, \cdot)$: $\bar{D}\to Y$, $\forall t\in[0,1]$, $H_t\in S_A(D)$, 如存在 $\lambda^*>0$, 使 $p\notin(H+\lambda S)([0,1]\times\partial D)$, $\forall\lambda\in[0,\lambda^*]$, 则 $\mathrm{Deg}_S(H_t, D, p)$与 $t\in[0,1]$ 无关。

3) 设 H: $[0,1]\times\bar{D}\to Y$, $H_n=Q_nH$: $[0,1]\times\bar{D}_n\to Y_n$ 依 t 对 $x\in\partial D_n$ 一致连续($\forall t\in[0,1]$), $H_t=H(t, \cdot)\in S_A(D)$, 如果存在 $\lambda^*>0$ 及 $\lambda_0\in[0,\lambda^*)$以及 $n_0\in N$ 使得 $p\notin(H+\lambda S)([0,1]\times\partial D)(\forall\lambda\in[0,\lambda^*))$且 $Q_np\notin(H+\lambda_0S)_n([0,1]\times\partial D)(\forall n\geqslant n_0)$, 则 $\mathrm{Deg}_S(H_t, D, p)$与 $t\in[0,1]$ 无关。

4) 设 $D_1, D_2\subset D$ 开, $D=D_1\cup D_2$, $D'=(D_1\cap D_2)\cup\partial D_1\cup\partial D_2$, $p\notin T(D')$, 那么

$$\mathrm{Deg}_S(T, D, p)\subseteq \mathrm{Deg}_S(T_1, D_1, p)+\mathrm{Deg}_S(T, D, p_2)$$

5) 设 T_1, $T_2\in S_A(D)$, $T_1x=T_2x$, $(\forall x\in\partial D)$且 $p\notin T_1(\partial D)$, 则 $\mathrm{Deg}_S(T_1, D, p)=\mathrm{Deg}_S(T_2, D, p)$。

6) 设 $p(t)$: $[0,1]\to Y$, $p[0,1]\subset Y\setminus T_\lambda(\partial D)\ \forall\lambda\in(0,\lambda^*)$, 则 $\mathrm{Deg}_S(T, D, p(t))$与 $t\in[0,1]$无关。

证明　1) 如果 $\mathrm{Deg}_S(T, D, p)\neq\{0\}$, 由定义 5 知, 存在 $\lambda^*>0$, 使得对 $\forall\lambda(0,\lambda^*)$, $\deg(T_\lambda, D,$

$p)\neq\{0\}$, 于是由定理1知, 存在$x_\lambda\in D$, 使得 $T_\lambda(x_\lambda)=p$。选取 $\lambda_n\in(0,\lambda^*)$使$\lambda_n\to0^+$, 根据 $T\in S_A(D)$因而满足条件 A_2)有 $x\in\bar{D}$ 使得 $T(x)=p$, 但 $p\notin T(\partial D)$, 故 $x\in D$。

2) 固定 $\lambda\in(0,\lambda^*)$, 令 $H'_t(\cdot)=H'(t, \cdot)=H_t(\cdot)+\lambda S(\cdot)$, 则 H': $[0,1]\times\bar{D}\to Y$, 注意到 $H_t\in S_AD$)知$(H_t)_\lambda fa$ 连续, $H'_t(\cdot)$是广义 A-proper 的, 因而 H'_n: $[0,1]\times\bar{D}\to Y_n$ 连续($\forall n\in N$), 又 $H_t(x)$依 t 对 $x\in\bar{D}$ 一致连续, 所以 $H'_t(x)$依 t 对 $x\in\bar{D}$ 一致连续。由条件 $p\in Y\setminus H'([0,1]\times\partial D)$, 根据定理 1。3), $\deg(H'_t, D, p)$与 $t\in[0,1]$ 无关。注意到 $\lambda\in(0,\lambda^*)$是任意固定的, 即有 $\mathrm{Deg}_S(H_t, D, p)$与 $t\in[0,1]$ 无关。

3) 固定 $n\geqslant n_0$, 考虑: $T_n(t, x)=H_n(t, x)+\lambda_0S_n(x)$, $\forall(t, x)\in[0,1]\times D_n$, 因 $T\in S_A(D)$, $T+\lambda_0S$ 是fa 是连续的。即 $T_n(t, \cdot)$: $\bar{D}_n\to Y_n$ 连续, 所以由 Brouwer 拓扑度的性质, $\mathrm{Deg}(T_n(t, \cdot), D_n, Q_np)$与 $t\in[0,1]$ 无关, 于是 $\mathrm{Deg}(H(t, \cdot)+\lambda_0S(\cdot), D, p)$、$t\in[0,1]$ 也无关。又 $\lambda_0\in(0,\lambda^*)$, 故由定义 6, $\mathrm{Deg}_S(H_t, D, p)$与 $t\in[0,1]$ 无关。

4) 可由广义 A-proper 拓扑度的定义及 Brouwer 拓扑度的性质证得。

5) 取 $\lambda^*>0$, 使得 $p\notin(T_1)_\lambda(\partial D)$, $(\forall\notin(0,\lambda^*))$同时便有 $p\notin(T_2)_\lambda(\partial D)$, 因 $T_1\in S_A(D)$, $T_2\in S_A(D)$, $(T_1)\lambda$, $(T_2)_\lambda$ 都是fa 连续的, 故由定理 1 得 $\mathrm{Deg}((T_1)_\lambda, D, p)=\mathrm{Deg}((T_2)_\lambda, D, p)$, $\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$, 即 $\mathrm{Deg}_S(T_1, D, p)=\mathrm{Deg}_S(T_2, D, p)$。

6) 直接由文献[2] 中定理 1.3 可得。

定理**3**　设 $T\in S_A(D)$, 同时 T: $\bar{D}\to Y$ 又是广义A-proper映射, 则当$p\in Y\setminus T(\partial D)$时, 有

$\mathrm{Deg}_S(T, D, p) = \deg(T, D, p)$。

证明　由 $p \notin Y \setminus T(\partial D)$ 知存在 $\lambda^* > 0$, 使当 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 时 $p \notin Y \setminus T_\lambda(\partial D)$(引理1)。

令 $H_t(x) = T(x) + t\lambda S(x)$, $t \in [0, 1]$, $\lambda \in (0, \lambda^*)$, 易知 $H_t(\circ)$ 是广义 A-proper 映射且 fa 连续, 且 $H_t(x)$ 依 t 关于 $x \in D$ 一致连续。故由定理1的第3)条, 得

$$\deg(T, D, p) = \deg(T + \lambda S, D, p)$$

$$\deg(T, D, p) = \mathrm{Deg}_S(T, D, p)$$

注(4)　定理3说明本文定义的广义 S-A-proper 拓扑度是广义 A-proper 拓扑度的推广。

作为本文所建立的拓扑度的应用, 下面给出一类映射的不动点定理。

定义7　设 Banach 空间 X 具有完备投影格式 $\Gamma_\alpha = \{X_n, P_n\}$, 称 $T: D \subset X \to X$ 为广义 P_1 一紧映象, 如果对每一 $\geqslant 1$, $\lambda I - T$ 关于 Γ_α 为广义 A-proper 映象(这里 $I: X \to X$ 为恒同映射)。

引理3　设 $D \subset X$ 是有界开集, $0 \in D$。$T: D \to X$ 有界 fa 连续, 如果 T 关于 Γ_α 是广义 I-A-proper 映射($S = I$ 时), 且 $\forall x \in \partial D$, $\forall \lambda \geqslant 0$, $Tx + \lambda x \neq 0$, 则 $\mathrm{Deg}_I(T, D, 0) = \{1\}$。

证明　知 $\forall t \in [0, 1]$, $x \in D$, $H(x, t) = H_t(x) = (1 - t)Tx + tx$, 易证 H 满足定理2的第3)条件, 从而 $\deg(T, D, 0) = \deg(I, D, 0) = \{\deg(I_n, D_n, 0)\} = \{1\}$。再由 S-A-proper 的定义及广义 S-A-proper 的定义知 $\mathrm{Deg}_I(T, D, 0) = \{1\}$。

定理4　设 $D \subset X$ 为有界开集, $0 \in D$, $T: D \to X$ 是有 fa 连续的广义 P_1 一紧映象, 如果下面 Leray-Schauder 条件成立: $Tx \neq \lambda x$ ($\forall x \in \partial D$ 和 $\lambda > 1$), 则 T 在 D 内有一不动点。

证明　令 $T_1 = I - T$, 则对 $\forall \lambda \geqslant 0$, $\lambda I + T_1 = (\lambda + 1)I - T_1$ 关于 Γ_α 是广义 A-proper, 进而 $T_1 \in I_A(D)$ 有界、fa 连续, 且对 $\forall x \in \partial D$, $\forall \lambda \geqslant 0$, $T_1 x + \lambda x = (1 + \lambda)x - Tx \neq 0$, 所以 T_1 满足引理3的条件, 因而 $\mathrm{Deg}_I(T_1, D, 0) = \{1\}$。由定理2的第2)条, $T_x = 0$ 在 D 中有解, 即 T 在 D 中有不动点。还可得到:

定理5　设 $D \subset X$ 为有界开集, $0 \in D$, 假设 $T: D \to X$ 是一有界 fa 连续广义 P_1 一紧映象, 使:

1) 由 $\lambda \in \varepsilon_{\partial p}$ 可得 $\varepsilon_D \cap [1, \lambda] \neq \phi$。这里, 对 $H \in D$, 定义 $\varepsilon_H = \{\lambda > 1$: 有 $x \in H$ 使得 $Tx = \lambda x\}$。

2) 对 $\forall \lambda \geqslant 1$, $(\lambda I - T)(D) = D_\lambda$ 是开集。则 T 在 D 内有一不动点。限于篇幅, 关于广义 S-A-proper 映射的满值性问题将另文讨论。

参　考　文　献

1　Petryshyn W V. On the approximation solvability of equations involving A-proper and pseudo-A-proper mappings. Bull Amer Math Soc. 1975, (81): 223~312

2　闵乐泉. 广义 A-proper 映射的拓扑度. 数学研究与评论, 1985, (4): 59~64

3　Takahashi W. The closedness property and the pseudo-A-proper of accretive operator. J Math Anal Appl, 1988, (132): 146~157

A Degree of Generalized S-A-proper Mappings and Applications

He Mingxing

(Dept. of Basic Sci., Sichuan Institute of Technology　Chengdu　611744)

Abstract　In this paper the definition of generalized S-A-proper mappings and their topological degree is estabilshed. The properties and applications of the degree are studied, in which some fixed point results about the generalized P_1-compact mappings are proved by the degree theory.

Key words　aproper mapping;　compact mapping;　topological degree;　fixed point

编辑　徐安玉