

基于四阶累积量的子空间测向方法研究*

丁齐** 肖先赐***

(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

【摘要】 研究了四阶累积量在子空间测向中的几种应用,包括四阶累积量用于色高斯噪声抑制、阵列扩展及提高算法对模型误差的稳健性等几个方面,提出了四阶 MUSIC 和四阶 ESPRIT 测向方法,并用计算机模拟验证了文中的有关结论。

关键词 阵列处理; 超分辨; 累积量; 子空间; 测向

中图分类号 TN911.72; TN971.1

近十年来,高阶统计作为一种强有力的信号处理工具,已经在通信、雷达、声纳及地球物理、生物医学等领域得到了极为广泛的应用^[1~3]。在理论上,传统的基于二阶统计量的信号处理方法均可采用高阶统计的方法进行处理,但是由于高阶统计量有着与二阶统计量不同的特点,因而基于高阶统计量的信号处理方法并不是在所有的场合都有效。

高阶统计量是指高于二阶的统计量,包括高阶的累积量及其相应的高阶谱。目前高阶统计量的应用研究主要集中在三阶和四阶统计量。高阶统计量具有盲高斯性、相位可检测性和更多的高阶信息等特点。在阵列测向中,利用高阶累积量的盲高斯性,可以抑制空间色高斯噪声;利用其丰富的高阶信息,可以进行多种处理,提高算法的性能。由于对称分布的随机信号的三阶累积量为零,因而阵列测向中常用四阶累积量进行处理。

目前,已有一些成功的基于四阶累积量的子空间测向方法,文献[4]提出了一种 MUSIC-like 方法,该方法是将四阶累积量用于阵列测向的一种成功的尝试;文献[5]分析了四阶累积量在阵列处理中的阵列扩展能力,并发现阵列扩展对阵列模型误差校正具有一定的意义;文献[6]对基于四阶累积量的子空间方法进行了分析,提出了四阶子空间的概念,并分析了四阶子空间与二阶子空间的关系。

本文基于高阶累积量的定义和性质,研究了基于四阶累积量的子空间测向方法的特点,提出了四阶 MUSIC 算法和四阶 ESPRIT 算法,最后用计算机模拟结果验证了文中的有关结论。

1 四阶累积量的定义与性质^[1]

对于一个均值为零的复平稳随机序列 $\{x(n)\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ 其二、三、四阶累积量分别定义为

$$c_{2,x}(m) = E\{x(n)x^*(n+m)\} \quad (1)$$

$$c_{3,x}(m_1, m_2) = E\{x(n)x(n+m_1)x^*(n+m_2)\} \quad (2)$$

$$c_{4,x}(m_1, m_2, m_3) = E\{x(n)x(n+m_1)x^*(n+m_2)x^*(n+m_3)\}$$

* 1997 年 6 月 5 日收稿, 1997 年 6 月 23 日修改定稿

* 电子部预研基金资助项目

** 男 27 岁 博士生

*** 男 64 岁 教授 博士生导师

$$\begin{aligned}
& - E\{x(n)x(n+m_1)\}E\{x^*(n+m_2)x^*(n+m_3)\} \\
& - E\{x(n)x^*(n+m_2)\}E\{x(n+m_1)x^*(n+m_3)\} \\
& - E\{x(n)x^*(n+m_3)\}E\{x(n+m_1)x^*(n+m_2)\}
\end{aligned} \quad (3)$$

对于对称分布的零均值复平稳随机序列 $\{x(n)\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$, 其四阶累积量为

$$\begin{aligned}
c_{4,x}(m_1, m_2, m_3) &= E\{x(n)x(n+m_1)x^*(n+m_2)x^*(n+m_3)\} \\
& - E\{x(n)x^*(n+m_2)\}E\{x(n+m_1)x^*(n+m_3)\} \\
& - E\{x(n)x^*(n+m_3)\}E\{x(n+m_1)x^*(n+m_2)\}
\end{aligned} \quad (4)$$

式中 $(\cdot)^*$ 为取复数共轭。

累积量有许多优良性质可以利用, 下面列出有关性质^[1]:

1) 若 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 为常量, $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为随机变量, 则累积量满足以下关系

$$\text{cum}(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) = \prod_{i=1}^n \alpha_i \text{cum}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5a)$$

2) 若随机变量 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 与随机变量 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 之间统计独立, 则

$$\text{cum}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = \text{cum}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \text{cum}(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (5b)$$

3) 四阶累积量完全抑制高斯噪声, 若 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为高斯随机变量, 那么

$$\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}) = 0 \quad (5c)$$

4) 如果 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 中有任一非空子集独立于该子集的余集, 则

$$\text{cum}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (5d)$$

式中 $\text{cum}(\cdot)$ 表示求累积量。

2 基于四阶累积量的子空间测向

对窄带信号的阵列测向一般基于以下的数学模型: 设空间 D 个远场窄带信号投射到 M 个传感器组成的阵列上, 各传感器全向一致, 接收系统各通道响应特性也一致, 空间信号相互独立, 信号与噪声统计独立, 噪声服从高斯分布, 空间信号为非高斯信号, 空间信号及通道输出平稳。第 m 个传感器对于方向 θ 的响应系数为 $a_m(\theta)$, 阵列在 θ 方向上的响应系数向量即方向向量为 $a(\theta) = [a_1(\theta), a_2(\theta), \dots, a_M(\theta)]^T$ 。阵列对 D 个不重合方向 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D)$ 的响应系数矩阵 $A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_D)]$ 为满秩阵。第 m 个阵元的输出为

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^D a_m(\theta_k) s_k(t) + n_m(t) \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

式中 $s_k(t)$ 为第 k 个空间信号; $n_m(t)$ 为第 m 个通道的噪声。式(6)写成向量形式为

$$X(t) = AS(t) + N(t) \quad (7)$$

式中 $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$, $N(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ 分别为阵列输出向量和噪声向量, $S(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T$ 为空间信号向量。为推导方便, 下面阵列输出信号、空间信号、噪声及其相应的向量均省略自变量 t 。

现有的子空间测向方法^[7], 如 MUSIC、ESPRIT、Min-norm 算法等大多是将 M 个阵元输出的协方差构成 $M \times M$ 维矩阵, 将该矩阵的特征空间分解为信号子空间和噪声子空间, 利用子空间的正交性求取信号方向。而对各阵元输出的四阶累积量构成的矩阵进行分析, 同样也可得到四阶的信号子空间和噪声子空间, 利用子空间的正交性, 也可得到四阶的 MUSIC 和四阶的 ESPRIT 算法。

2.1 四阶累积量对空间色高斯噪声抑制

传统的二阶测向方法多是针对白高斯噪声进行处理, 在色高斯噪声条件下该类算法性能将大大降低。而四阶测向方法却能抑制空间色高斯噪声。

在以上模型下, $x_m(t)$, $m = 1, 2, \dots, M$ 的四阶累积量为

$$\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}^*, x_{k_4}) = \sum_{i=1}^D a_{k_1}(\theta_i) a_{k_2}^*(\theta_i) a_{k_3}^*(\theta_i) a_{k_4}(\theta_i) \text{cum}(s_i, s_i^*, s_i^*, s_i) \quad (8)$$

式中 $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, M\}$ 。

从式(8)中可看到, 四阶累积量充分抑制了色高斯噪声。

2.2 基于四阶累积量的 MUSIC 算法

对于一个 M 元的阵列, 其协方差仅有 M^2 个不同的值, 而其四阶累积量则包含更多的值。如式(8)中, 当 k_1, k_2, k_3, k_4 在 $[1, M]$ 中变化时, 其四阶累积量有 $[M(M-1)/2]^2$ 个不同的值, 也就是说四阶累积量有更多的统计信息可资利用。

一种充分利用四阶累积量的测向方法为构造矩阵 C , 其第 $(k_1-1)M+k_2$ 行第 $(k_3-1)M+k_4$ 列元素为 $\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}^*, x_{k_4})$, 其中 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, M\}$, 该矩阵表示为

$$C = E\{(X \otimes X^* \otimes X^*) (X \otimes X^*)^H\} - E\{X \otimes X^*\} E\{(X \otimes X^*)^H\} - E\{XX^H\} \otimes E\{(XX^H)^*\} \quad (9)$$

式中 \otimes 表示 kronecker 积, $()^H$ 为取复共轭转置。

空间信号的四阶累积量矩阵为

$$C_S = E\{(S \otimes S^*) (S \otimes S^*)^H\} - E\{S \otimes S^*\} E\{(S \otimes S^*)^H\} - E\{SS^H\} \otimes E\{(SS^H)^*\} \quad (10)$$

式中 C_S 为 $D^2 \times D^2$ 维矩阵, $\text{cum}(s_{k_1}, s_{k_2}^*, s_{k_3}^*, s_{k_4})$ 为其第 $[(k_1-1)D+k_2]$ 行第 $[(k_3-1)D+k_4]$ 列的元素。根据式(8), 四阶累积量矩阵 C 表示为

$$C = BTB^H \quad (11)$$

式中

$$B = [a(\theta_1) \otimes a^*(\theta_1), a(\theta_2) \otimes a^*(\theta_2), \dots, a(\theta_D) \otimes a^*(\theta_D)] = [b(\theta_1), b(\theta_2), \dots, b(\theta_D)] \quad (12)$$

$$T = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_D\} \quad (13)$$

$$r_k = \text{cum}(s_k, s_k, s_k^*, s_k^*) \quad (14)$$

式中 $\text{diag}\{\circ\}$ 表示以括号中元素为对角元素, 其他元素为零的对角矩阵。

对 C 进行特征分解, 其特征值从大到小排列为 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{M^2})$, 相应的特征向量为 $(u_1, u_2, \dots, u_{M^2})$ 。根据式(11), 矩阵 C 的 D 个大特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, D)$ 对应的特征向量张成信号子空间 Ω_S , 其他 $M^2 - D$ 个最小特征值对应的特征向量张成四阶噪声子空间 Ω_N , 即

$$\Omega_S = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_D\} = \text{span}\{b(\theta_1), b(\theta_2), \dots, b(\theta_D)\} \quad (15)$$

$$\Omega_N = \text{span}\{u_{D+1}, u_{D+2}, \dots, u_{M^2}\} \quad (16)$$

由此依二阶的子空间方法可导出四阶的子空间测向方法, 下面给出四阶的 MUSIC 算法。定义四阶噪声子空间向量组成的矩阵为

$$E_N = [u_{D+1}, u_{D+2}, \dots, u_{M^2}] \quad (17)$$

利用 Ω_S 与 Ω_N 正交性, 得到四阶 MUSIC 算法的空间谱为

$$P(\theta) = \|E_N b(\theta)\|_2^{-2} \quad (18)$$

式中 $\|\cdot\|_2$ 表示向量二范数。 $P(\theta)$ 的 D 个极大值对应方向为待测信号方向。

比较二阶 MUSIC 和四阶 MUSIC 的信号子空间发现, 前者信号子空间由 $\{a(\theta_i), i=1, 2, \dots, D\}$ 张成, 而后的信号子空间由 $\{a(\theta_i) \otimes a^*(\theta_i), i=1, 2, \dots, D\}$ 张成。将 $a(\theta) \otimes a^*(\theta)$ 看成某一虚拟阵的响应系数向量, 经分析可知以 $a(\theta) \otimes a^*(\theta)$ 为方向向量的虚拟阵其阵元数较实际阵列多, 阵列口径也较实际阵列大, 故四阶 MUSIC 算法有阵列扩展的能力, 其测向的信号数可超过阵元数的限制。

2.3 基于四阶累积量的 ESPRIT 算法及模型误差的影响

在实际高分辨测向系统中, 常常不能保证测向系统多个通道幅度和相位严格一致, 对式(2)所定义的信号模型, 当存在模型误差的条件时为如下形式^[7]

$$X = \Gamma A(t)S + N(t) \quad (19)$$

式中 $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M\}$, 其中 $\gamma_i, i \in [1, M]$ 为一复数, 表示由第 i 个通道引起的幅度和相位不一致性。

当 k_1, k_2 两通道保持一致即 $\gamma_{k_1} = \gamma_{k_2} = \gamma$ 时, 构造四阶累积量矩阵 C_1 和 C_2 , 矩阵 C_1 的第 k 行第 l 列元素为 $\text{cum}(x_k, x_{k_1}^*, x_l^*, x_{k_2})$, 矩阵 C_2 第 k 行第 l 列的元素为 $\text{cum}(x_k, x_{k_1}^*, x_l^*, x_{k_1})$, 其中 $k_1, k_2 \in [1, M]$ 为两确定常数, 矩阵 C_1 表示为

$$C_1 = E\{(X \otimes x_{k_1}^*)(X \otimes x_{k_2}^*)^H\} - E\{X \otimes x_{k_1}^*\}E\{(X \otimes x_{k_2}^*)^H\} - E\{XX^H\} \otimes E\{x_{k_1}^* x_{k_2}\} \quad (20)$$

将式(19)代入式(20), 根据式(8)化简有

$$C_1 = |\gamma|^2 \Gamma A \text{diag}\{a_{k_1}^*\} T_s \text{diag}\{a_{k_2}\} A^H \Gamma^H \quad (21)$$

其中 $\text{diag}\{a_k\} = \text{diag}\{a_k(\theta_1), a_k(\theta_2), \dots, a_k(\theta_D)\}$ 。于是

$$C_1 = |\gamma|^2 \Gamma A \Psi T_s A^H \Gamma^H \quad (22)$$

式中

$$\Psi = \text{diag}\{a_{k_1}^*(\theta_1) a_{k_2}(\theta_1), a_{k_1}^*(\theta_2) a_{k_2}(\theta_2), \dots, a_{k_1}^*(\theta_D) a_{k_2}(\theta_D)\} \quad (23)$$

同理可得

$$C_2 = |\gamma|^2 \Gamma A T_s A^H \Gamma^H \quad (24)$$

于是 C_1 和 C_2 构成了移动不变的矩阵对, 对 $[C_1, C_2]$ 进行广义特征分解

$$C_1 V = C_2 V \Lambda \quad (25)$$

式中 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D\}$, 其中 $\lambda_i \neq 0, i=1, 2, \dots, D$ 。令

$$\lambda_i = a_{k_1}^*(\theta_i) a_{k_2}(\theta_i) \quad i=1, 2, \dots, D \quad (26)$$

解式(26)即可求得 D 个待测信号方向。本方法类似于 ESPRIT 方法, 这里称为四阶 ESPRIT 方法。实现四阶 ESPRIT 方法的准确测向仅要求 M 个通道中存在两个通道幅相特性一致, 因此说本方法对模型误差具有稳健性。

3 计算机模拟

为验证文中方法, 我们进行了计算机仿真, 下面给出有关结果。

模拟实验 1 采用三元的非均匀线阵, 阵元间隔波长比为 0.5。图 1 是采用四阶 MUSIC 方法测向的阵列扩展示意图, 图中 \circ 表示实际阵元, \times 表示扩展阵元。显然, 图中扩展阵的阵列口径较

实际阵扩大了一倍, 阵元数扩展为七元。在色高斯噪声条件下对 6 个信号测向, 信噪比为 20 dB, 快拍数为 256, 信号方向位于 $45^\circ, 65^\circ, 80^\circ, 95^\circ, 110^\circ, 130^\circ$ 。图 2 所示的四阶 MUSIC 方法正确给出了方向。

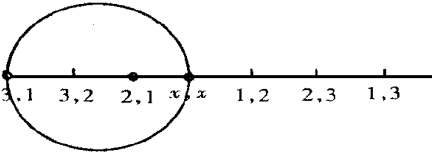


图 1 文中方法对三元线阵的扩展阵列

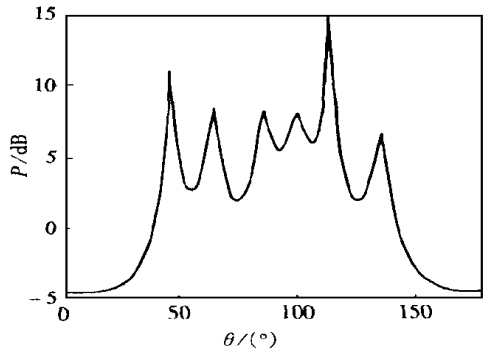


图 2 算法对 6 个信号的测向结果

模拟实验 2 采用七元均匀圆形阵列, 圆阵的半径波长比为 0.5。空间信号方向为 $20^\circ, 30^\circ$, 信噪比为 20 dB, 256 次快拍数据。模型保持第一、二两通道特性一致, 其他通道幅度特性有 3 dB 的随机误差, 相位特性为一定相位范围内的随机误差。采用四阶 ESPRIT 方法与二阶 MUSIC 方法测向, 每种相位误差条件下进行 30 次实验, 统计其均方根误差, 结果如表 1 所示(表中标出‘—’的单元其误差超出 20°)。

表 1 不同相位特性下算法的精度比较

相位不一致性		0	10	20	30	40	50	60
四阶	20°	1.147 2	0.885 4	0.799 6	0.995 7	1.087 0	1.051 2	0.975 0
ESPRIT	30°	1.206 9	1.217 3	1.139 6	0.948 9	0.953 4	0.988 0	1.161 5
MUSIC	20°	0.450 2	5.477 2	5.576 7	5.839 5	5.272 6	4.816 6	5.084 3
	30°	0.340 5	—	—	—	—	—	—

4 结 论

本文分析了基于四阶累积量的子空间测向方法, 通过理论分析和计算机模拟, 我们得出以下结论:

- 1) 基于四阶累积量的子空间测向方法有抑制色高斯噪声的能力;
- 2) 基于四阶累积量的 MUSIC 算法具有阵列扩展的能力;
- 3) 基于四阶累积量的 ESPRIT 算法对模型误差具有稳健性。

参 考 文 献

- 1 Mendel J M. Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some application. Proc IEEE, 1991, 79(3):278~305
- 2 Nikias C L, Petropulu A P. Higher-order spectra analysis: a nonlinear signal processing framework. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1993
- 3 张贤达. 时间序列分析—高阶统计量方法. 北京:清华大学出版社, 1996

- 4 Poral B, Friedlander B. Direction finding algorithms based on high-order statistics. IEEE Trans on SP, 1991, 39(9): 2 016 ~ 2 023
- 5 Dogan M G, Mendel J M. Application of cumulants to array processing. Part I: aperture extension and array calibration. IEEE Trans on SP, 1995, 43(5): 1 200 ~ 1 216
- 6 魏 平. 高分辨阵列测向系统研究. [博士论文] 成都: 电子科技大学, 1996
- 7 Haykin S. Advances in spectrum analysis and processing, Vol II. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Press, 1991
- 8 Roy R, Paulraj A, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotations invariance technique. IEEE Trans on ASSP, 1989, 34(7): 984 ~ 995

On DOA Estimation Method Based-on Fourth-order Cumulant

Ding Qi Xiao Xianci

(Dept. of Electronic Eng., UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, the DOA (direction of arrival) estimation methods based on fourth-order cumulant are investigated, and the algorithms-MUSIC and ESPRIT based on fourth-order cumulant are presented. The fourth-order MUSIC has the ability of array extension, and the fourth-order ESPRIT is robust to the channel uncertainty model errors. The results are verified by the simulation experiments.

Key words array processing; direction of arrival; MUSIC algorithm; ESPRIT algorithm; cumulant

编辑 叶 红

.....
 °科研成果介绍°

米波雷达超角分辨技术

主研人员: 黄振兴 何子述 张 扬 吕 明 黄鉴忠 郑昌璇等

米波雷达超角分辨技术用 Givens 变换递推算法、Burg 格形网络算法和 SVD 等算法有效地实现了三种超分辨率谱估值方法, 开发了相应的超分辨算法软件包, 在实验室中实现声传感阵数据采集系统。同时还研制了一部板级三角形 10 节点 C-25 Systolic 阵列超分辨信号处理机, 数据库为 50k FLOPS, 与声传感阵级联构成一个声波超分辨试验系统等。

该研究工作系统覆盖面宽, 研究成果达到国际先进水平。

°科 卞°