任意阶复宗量贝塞尔函数的数值计算 *

魏彦玉** 宫玉彬 王文祥
(电子科技大学高能电子所 成都 610054)

【摘要】 根据贝塞尔函数的级数展开式，详细讨论了任意阶第一、二类复宗量贝塞尔函数的数值计算方法，这种计算方法具有快速、精确的特点，而且不受阶数(包括整数和分数阶)的限制，所得计算结果与 Mathematica 计算结果进行了比较，具有较高的精度。

关 键 词 复宗量； 任意实数阶； 贝塞尔函数； 级数展开
中图分类号 O174.6

在柱坐标系下，处理电磁场的辐射、散射、导波以及电磁导波系统中的注一波互作用问题时，常常涉及到复宗量贝塞尔函数的计算。例如用严格的场方法对行波管进行小信号分析时，由于电子注与波产生互作用，就会产生增益，场随距离而增长，这时相位传播因子将为复数，其色散方程就是一个含有复宗量贝塞尔函数的超越方程，对它的数值求解就涉及到复宗量贝塞尔函数的计算。

由于目前复宗量贝塞尔函数值还无表可查，一些理论上计算复宗量贝塞尔函数的公式[1]在实际应用时受到一定的限制。本文直接从贝塞尔方程的级数解形式出发，将求复函数值化为分别计算其实部和虚部，获得了任意实数阶复宗量贝塞尔函数的计算公式。这些计算公式适合于一般宗量大小函数值的计算，对于较大宗量函数值的计算可利用其渐近式进行[2]。本文的计算方法简单易行，并与 Mathematica 的计算结果作了比较，两者完全一致；需要指出的是，为了尽可能减小截断误差和防止数据溢出，我们对所有的变量取双精度类型。

1 整数阶第一、二类复宗量贝塞尔函数计算

对于变量为 z 的贝塞尔方程

$$z^2y''+zy'+(z^2-p^2)y=0 \tag{1}$$

其级数解，即第一类贝塞尔函数可表示为[2]

·科

$$J_p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m\,!\Gamma(p+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2m} \tag{2}$$

第二类贝塞尔函数定义为

$$Y_p(z)=\frac{\cos(p\pi)J_p(z)-J_{-p}(z)}{\sin(p\pi)} \tag{3}$$

其中 p, z 均为复数。

1.1 $J_p(z)$的计算

当 p 为零和正整数时，令 $z=re^{i\varphi}(-\pi\leqslant\varphi<\pi)$，代入式(2)，并利用欧拉公式 $e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+$

1997年9月26日收稿
* 电子部预研基金资助项目
** 男 26岁 博士生

$\mathrm{i}\sin(\varphi)$即得

$$\mathrm{Re}J_p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!(p+m)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{p+2m}\cos(p+2m)\varphi \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}J_p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!(p+m)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{p+2m}\sin(p+2m)\varphi \tag{5}$$

则

$$J_p(z)=\mathrm{Re}[J_p(z)]+\mathrm{Im}[J_p(z)]\,\mathrm{i} \tag{6}$$

显然，负整数阶第一类贝塞尔函数的计算可通过公式

$$J_{-p}(z)=(-1)^pJ_p(z)$$

将其转化为正整数阶贝塞尔函数的计算。

1.2　$Y_p(z)$的计算

当 p 为零和正整数时

$$Y_p(z)=-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-m-1)!}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(r/2)^{p+2m}}{m!(p+m)!}\times$$
$$\{2\ln(z/2)-\Psi(m+1)-\Psi(p+m+1)\} \tag{7}$$

其中

$$\Psi(m+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\gamma$$

γ为欧拉常数0.577 215…，当 $m=0$，$\Psi(0)=-\gamma$。

同样地，将 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$代入式(7)，得

$$\mathrm{Re}\,Y_p(z)=-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-m-1)!}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\cos(-p+2m)+$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(r/2)^{p+2m}}{m!(p+m)!}\left\{2\ln\left(\frac{z}{2}\right)-\Psi(m+1)-\Psi(p+m+1)\right\}\times$$
$$\cos(p+2m)-\frac{2\varphi}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(r/2)^{p+2m}}{m!(p+m)!}\sin(p+2m)\varphi \tag{8}$$

$$\mathrm{Im}\,Y_p(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-m-1)!}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\sin(-p+2m)+$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(r/2)^{p+2m}}{m!(p+m)!}\left\{2\ln\left(\frac{z}{2}\right)-\Psi(m+1)-\Psi(p+m+1)\right\}\times$$
$$\sin(p+2m)+\frac{2\varphi}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(r/2)^{p+2m}}{m!(p+m!)}\cos(p+2m)\varphi \tag{9}$$

同样，负整数阶第二类贝塞尔函数的计算可由 $Y_{-p}(z)=(-1)^pY_p(z)$求得。

2　分数阶复宗量贝塞尔函数的计算

2.1　$J_{\pm p}(z)$的计算公式

当 p 为分数时，由式(2)得

$$\mathrm{Re}J_{\pm p}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(\pm p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\pm p+2m}\cos(\pm p+2m)\varphi \tag{10}$$

$$\mathrm{Im}J_{\pm p}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(\pm p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\pm p+2m}\sin(\pm p+2m)\varphi \tag{11}$$

$J_{-p}(z)$的幂级数展开式中出现 $\Gamma(-p)$，它的计算需通过

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)} \tag{12}$$

的变换关系来进行，可以证明式(12)在 $n<|p|<n+1(n=0,1,2,3\cdots)$时均成立。由此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}J_{-p}(z)=&\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\mathrm{Int}[p]-1}(-1)^m\frac{\Gamma(p-m)\sin(p-m)\pi}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\cos(-p+2m)\varphi+\\&\sum_{m=\mathrm{Int}[p]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\cos(-p+2m)\varphi\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}J_{-p}(z)=&\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\mathrm{Int}[p]-1}(-1)^m\frac{\Gamma(p-m)\sin(p-m)\pi}{m!}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\sin(-p+2m)\varphi+\\&\sum_{m=\mathrm{Int}[p]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\sin(-p+2m)\varphi\end{aligned} \tag{14}$$

2.2　$Y_{\pm p}(z)$的计算

当 p 为分数时，将式(13)、(14)代入式(3)得复宗量分数阶诺依曼函数的计算公式

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,Y_p(z)=&\frac{1}{\mathrm{tg}(p\pi)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{p+2m}\cos(p+2m)\varphi-\\&\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\mathrm{Int}[p]-1}(-1)^m\frac{\Gamma(p-m)\sin(p-m)\pi}{m!\sin p\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\cos(-p+2m)\varphi-\\&\frac{1}{\sin p\pi}\sum_{m=\mathrm{Int}[p]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\cos(-p+2m)\varphi\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,Y_p(z)=&\frac{1}{\mathrm{tg}(p\pi)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{p+2m}\sin(p+2m)\varphi-\\&\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\mathrm{Int}[p]-1}(-1)^m\frac{\Gamma(p-m)\sin(p-m)\pi}{m!\sin p\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\sin(-p+2m)\varphi-\\&\frac{1}{\sin p\pi}\sum_{m=\mathrm{Int}[p]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\sin(-p+2m)\varphi\end{aligned} \tag{16}$$

同样

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,Y_{-p}(z)=&\frac{1}{\sin(p\pi)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{p+2m}\cos(p+2m)\varphi+\\&\frac{1}{\mathrm{tg}(p\pi)}\sum_{m=0}^{\mathrm{Int}[p]-1}(-1)^m\frac{\Gamma(p-m)\sin(p-m)\pi}{m!\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\cos(-p+2m)\varphi+\\&\sum_{m=\mathrm{Int}[p]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\cos(-p+2m)\varphi\end{aligned} \tag{17}$$

例 子

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,Y_{-p}(z)=&\frac{1}{\sin(p\pi)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!\Gamma(p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{p+2m}\sin(p+2m)\varphi+\\&\frac{1}{\mathrm{tg}(p\pi)}\sum_{m=0}^{\mathrm{Int}[p]-1}(-1)^m\frac{\Gamma(p-m)\sin(p-m)\pi}{m!\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\sin(-p+2m)\varphi+\\&\sum_{m=\mathrm{Int}[p]}^{m}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{-p+2m}\sin(-p+2m)\varphi\end{aligned} \tag{18}$$

由

以上展开式中的泰勒级数都是快速收敛级数[3]，利用它们就可以对复宗量第一、二类贝塞尔函数进行数值计算。

3　数值计算结果

利用前面分析得到的理论公式,我们编制程序对复宗量贝塞尔函数进行了计算,将所得到结果与 Mathematica 计算结果比较,发现两者吻合良好,详见表 1。图 1 ~4 为整数阶复宗量贝塞尔函数立体图,图中可以清楚地看出复宗量贝塞尔函数值随宗量的变化趋势。

表 1 本文结果与 Mathematica 的比较

阶数 p	宗量 $z=a+b\mathrm{i}$	$J_p(z)$, $Y_p(z)$（本文计算结果）	$J_p(z)$, $Y_p(z)$（Mathmathtica 计算结果）
2	$0+6.8\,\mathrm{i}$	$J_p=-38.470\,44+1.338\,17\times10^{-14}\,\mathrm{i}$ $Y_p=1.350\,43\times10^{-3}-38.470\,44\,\mathrm{i}$	$J_p=-38.470\,4+0\,\mathrm{i}$ $Y_p=0.001\,350\,4-38.470\,4\,\mathrm{i}$
5.6	$0.0+70.0\,\mathrm{i}$	$J_p=7.758\,54\times10^{+28}+5.636\,91\times10^{+28}\,\mathrm{i}$ $J_{-p}=-7.758\,54\times10^{+28}-5.636\,91\times10^{+28}\,\mathrm{i}$ $Y_p=5.636\,90\times10^{+28}-7.758\,54\times10^{+28}\,\mathrm{i}$ $Y_{-p}=-5.636\,90\times10^{+28}-7.758\,54\times10^{+28}\,\mathrm{i}$	$J_p=-7.758\,54\times10^{+28}+5.636\,91\times10^{+28}\,\mathrm{i}$ $J_{-p}=-7.758\,54\times10^{+28}-5.636\,91\times10^{+28}\,\mathrm{i}$ $Y_p=5.636\,91\times10^{+28}-7.758\,54\times10^{+28}\,\mathrm{i}$ $Y_{-p}=5.636\,91\times10^{+28}-7.758\,54\times10^{+28}\,\mathrm{i}$
15.3	$9.0+12.0\mathrm{i}$	$J_p=2.590\,08-26.771\,86\,\mathrm{i}$ $J_{-p}=20.136\,53+17.830\,90\,\mathrm{i}$ $Y_p=26.771\,90+2.589\,56\,\mathrm{i}$ $Y_{-p}=-17.831\,56+20.136\,79\,\mathrm{i}$	$J_p=2.590\,08-26.771\,8\,\mathrm{i}$ $J_{-p}=20.136\,5+17.831\,\mathrm{i}$ $Y_p=26.771\,9+2.589\,47\,\mathrm{i}$ $Y_{-p}=-17.831\,6+20.136\,8\,\mathrm{i}$
20	$11.0+10.0\,\mathrm{i}$	$J_p=8.995\,86\times10^{-2}-4.182\,06\times10^{-2}\,\mathrm{i}$ $Y_p=-7.553\,45\times10^{-2}-8.509\,55\times10^{-3}\,\mathrm{i}$	$J_p=0.089\,958\,6-0.041\,820\,6\,\mathrm{i}$ $Y_p=-0.075\,534\,5-0.008\,509\,56\,\mathrm{i}$

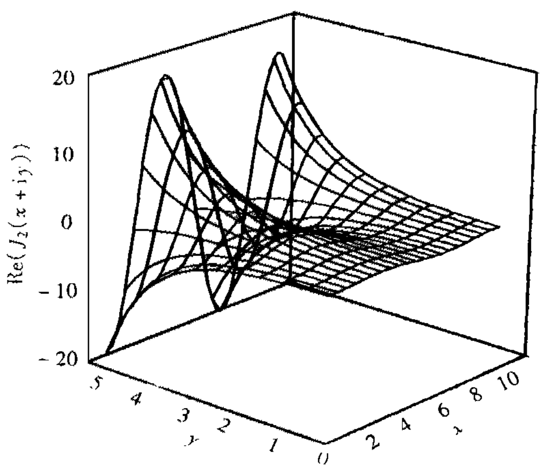

图 1 复宗量贝塞尔函数 $J_2(z)$ 的实部随宗量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的变化

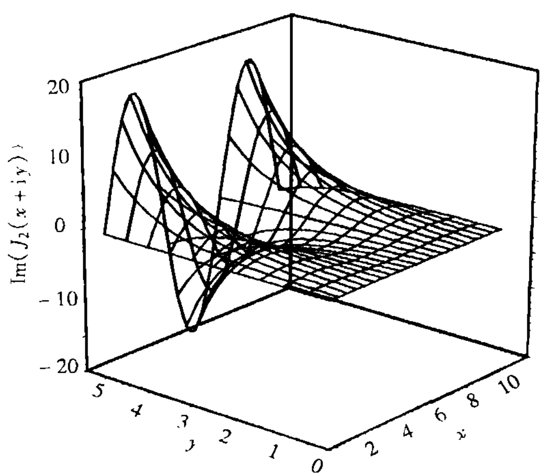

图 2 复宗量贝塞尔函数 $J_2(z)$ 的虚部随宗量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的变化

4 讨 论

由上面的分析和计算,我们可以看出:

1）本文计算所得结果与 Mathmatic 计算结果吻合良好,具有较高的精度。

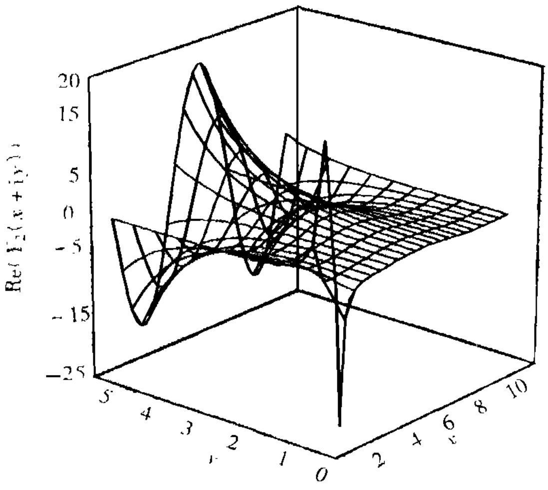

图 3　复宗量贝塞尔函数 $Y_2(z)$ 的实部随宗量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的变化

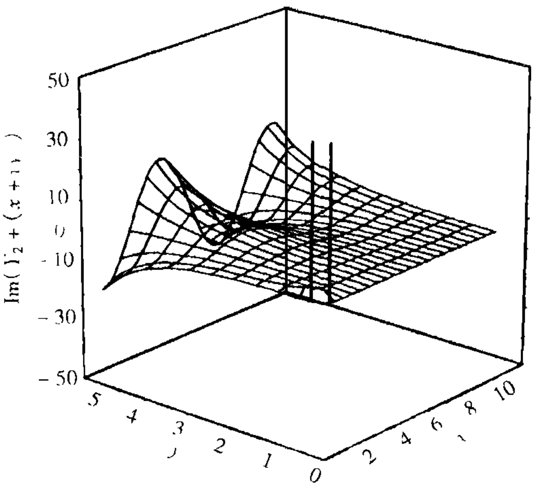

图 4　复宗量贝塞尔函数 $Y_2(z)$ 的虚部随宗量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的变化

2）此计算理论适用于任意实数阶复宗量第一、二类贝塞尔函数值的计算，当 z 为实数时，即可计算实宗量贝塞尔函数值。

3）根据 Hankel 函数以及第一、二类变态贝塞尔函数 $I_p(z)$ 和 $K_p(z)$ 的定义[2]

$$H_p^{(1,2)}(z)=J_p(z)\pm \mathrm{i}Y_p(z) \tag{19}$$

$$I_p(z)=\mathrm{i}^{-p}J_p(\mathrm{i}z) \tag{20}$$

$$K_p(z)=\frac{\frac{\pi}{2}I_{-p}(z)-I_p(z)}{\sin(p\pi)} \tag{21}$$

利用本文的结果，可以方便地计算这些复宗量特殊函数值。

4）实际计算中由于只取有限项求和，所以计算结果存在一定的误差，当宗量较大时，误差变大，如利用多元 Tshebysheff 多项式或有理式逼近[4,5]，就能得到稳定精确的计算结果。

本文计算理论严格简洁，易于编程计算，具有普遍的实用价值。

参　考　文　献

1　Cornelis F, Du Toit. The numerical computation of Bassel function of the first and second kind for integer orders and complex argument. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1990, 38(9)：1 341～1 349

2　Watson G N. The theory of Bessel functions. London：The Cambridge Press, 1952

3　罗节特 T A, 黄奕雄译. 圆柱函数理论纲要及对无线电工程的应用. 北京：国防工业出版社, 1959

4　Hart John F. Computer approximations. New York：John Wiley & Sons Inc, 1968

5　Gearhart W B. Some Chebyshev approximations by polynomials in two variables. Journal of Approximation Theory, 1973, 3(8)：195～209

Numerical Calculation of Bessel Functions with Complex Argument for Arbitrary Orders

Wei Yanyu Gong Yubin Wang Wenxiang
(Institue of High Energy Electronics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract The rigorous theoretical formula to calculate the first and second kinds of arbitrary real order Bessel functions with complex argument is derived by means of the series expansion in this paper. The modified Bessel functions of the first and second kind with complex argument can also be calculated by these formula. The discrepancy of the numerical results obtained in this paper is compared to those given by the mathematica software package.

Key words arbitrary real order; complex argument; Bessel function; series expansion

编辑 徐培红

·科研成果介绍·

高稳定磁光克尔回线测试仪

主研人员 周建平 张晓平 王志刚 杨华军 杨成韬 黄晓革 范启华 徐树芸 陈小洪 陈宏猷 邓新武 葛启函 杨 峰 孙建川 段学忠

高稳定磁光克尔回线测试仪解决了以下关键技术:

1) 数字除运算的使用;

2) 在电路设计上,引入了热对称排布措施,同时采用了一系列高线性、高共模抑制比等模拟处理电路计算机接口电路按模块化设计;

3) 软件设计,采用了C语言调用汇编子程序方式,同时,在克尔角测量、定标以及磁场测量上采用了数字滤波等措施。

该测仪性能指标及功能已达到当前国内同类产品先进水平。

·科 卞·