第27卷 第2期 电子科技大学学报 Vol.27 No.2
1998年4月 Journal of UEST of China Apr.1998

(块)H矩阵与亚正定矩阵 *

黄廷祝 * * 蒲和平
(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 (块)H矩阵和亚正定矩阵都是数值代数和矩阵论研究中重要的矩阵类,具有广泛的应用背景。文中研究它们之间的关系,获得了一些具有理论和实际意义的结果。

关 键 词 H矩阵; 亚正定矩阵; 特征值; 范数
中图分类号 O151.21; O151.26; O241.6

(块)H矩阵及其子类M矩阵和亚正定矩阵,近年来一直是计算数学和矩阵论领域研究的热点之一,分别取得了不少优秀的成果[1~4]。然而,关于这两类重要的矩阵类的关系未见报道,而这同样是具有重要的理论和实际价值。本文研究它们之间关系,获得了一些有意义的结果。

文中将用如下记录:$N \triangleq \{1, 2, \cdots, n\}$,$M_n(R)$($M_n(C)$)表示$n$阶实(复)阵全体;$Z^{n,n} \triangleq \{(a_{ij}) \in M_n(R): a_{ij} \leqslant 0, i \neq j; i, j \in N\}$,$\lambda(A)$表示矩阵$A$的特征值;$\|\circ\|$表示与向量范数相容的矩阵范数;$I_n$表示$n$阶单位矩阵。

若$\boldsymbol{A} \in Z^{n,n}$,$\boldsymbol{A} = cI - \boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B} \geqslant 0$(非负矩阵),且谱半径$\rho(\boldsymbol{B}) < c$,则$\boldsymbol{A}$为M矩阵。

设$\boldsymbol{A} \in M_n(C)$,若其比较阵$\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{a}_{ij})$为M矩阵,则称$\boldsymbol{A}$为H矩阵。这里

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}| & i = j \\ -|a_{ij}| & i \neq j \end{cases} \quad i, j \in N$$

设$\boldsymbol{A} \in M_n(R)$,若$H(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)$为对称正定阵,则称$\boldsymbol{A}$为亚正定阵。

下面给出**M**矩阵、(块)**H**矩阵与亚正定矩阵的关系的结果。

引理1 设$\boldsymbol{A} \in M_n(R)$为亚正定矩阵,则$\mathrm{Re}\,\lambda(\boldsymbol{A}) > 0$。

证明 由假设知$H(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T)$对称正定,因而$\lambda(H(\boldsymbol{A})) > 0$,由

$$\min \lambda(H(\boldsymbol{A})) \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda(\boldsymbol{A}) \leqslant \max \lambda(H(\boldsymbol{A}))$$

知结论成立。 证毕

定理1 设$\boldsymbol{A} \in Z^{n,n}$为亚正定阵,则$\boldsymbol{A}$为M矩阵;又若$\boldsymbol{A}$为正规矩阵,则$\boldsymbol{A}$为亚正定矩阵的充分必要条件为$\boldsymbol{A}$是M矩阵。

证明 设$\boldsymbol{A}$为亚正定阵,则由引理1知

$$\mathrm{Re}\,\lambda(\boldsymbol{A}) > 0$$

又,$\boldsymbol{A} \in Z^{n,n}$,故根据文献[1],$\boldsymbol{A}$为M矩阵。

当$\boldsymbol{A}$为正规矩阵时,由文献[5]有

$$\{\lambda(H(\boldsymbol{A}))\} = \{\mathrm{Re}\,\lambda(\boldsymbol{A})\}$$

1997年7月14日收稿
* 四川省青年科技基金资助项目,青基办(19977003)
* * 男 33岁 硕士 教授

若 $\boldsymbol{A}$ 为 M 矩阵，由文献[1] M 矩阵的等价条件有

$$\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})>0$$

所以 $\lambda(H(\boldsymbol{A}))>0$。又 $H(\boldsymbol{A})$为实对称矩阵，因而 $H(\boldsymbol{A})$对称正实，即 $\boldsymbol{A}$ 为亚正定矩阵。　　证毕

由 H 矩阵定义立刻有

推论 1　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(C)$，若 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 为亚正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为 H 矩阵；又若 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 为 H 矩阵的充要条件为 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 为亚正定矩阵。

定理 2　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(R)$为正规 H 矩阵，$a_{ii}>0$，$i\in N$，则 $\boldsymbol{A}$ 为亚正定矩阵。

证明　$\boldsymbol{A}$ 为 H 矩阵，由文献[1] 知，即存在正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$ 使得

$$x_i\,|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}x_j\,|a_{ij}|\qquad i\in N$$

也就是存在正对角阵 $X=\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})=X^{-1}\boldsymbol{A}X$ 严格对角占优，又 $b_{ii}=a_{ii}>0$，$i\in N$，故根据文献[6] 定理 1 有 $\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{B})>0$，因而

$$\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})=\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{B})>0$$

又 $\boldsymbol{A}$ 为正规阵，所以 $\lambda(H(\boldsymbol{A}))>0$，再由 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A})$为对称阵知 $\boldsymbol{A}$ 为亚正定阵。　　证毕

下面再研究块 H 矩阵与亚正定矩阵。设 $\boldsymbol{A}\in M_n(C)$分块形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk}\end{pmatrix}\tag{1}$$

其中　$A_{ii}\in M_{n_i}(C)$非奇，$\sum_{i=1}^{k}n_i=n$。记 $K=\{1, 2, \cdots, k\}$。若存在正数 $x_1, x_2, \cdots, x_k>0$，使得

$$x_i\,\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}>\sum_{j\neq i}X_j\,\|A_{ij}\|\qquad i\in K\tag{2}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块 H 矩阵。

定理 3　设 $\boldsymbol{A}\in M_n(R)$为块 H 矩阵(向量范数取绝对范数)，$A_{ii}(i\in K)$为 M 矩阵，则存在正对角阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{QAX}$ 为亚正定矩阵。

证明　设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{k\times k}$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} & i=j\\ -\|A_{ij}\| & i\neq j\end{cases}\qquad i, j\in K$$

由假设 A 为块 H 矩阵及式(2)知存在正数 $x_1, x_2, \cdots, x_k>0$ 使得

$$x_i\,|b_{ii}|>\sum_{j\neq i}x_j\,|b_{ij}|\qquad i\in K\tag{3}$$

作正对角阵 $\boldsymbol{X}_1=\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，式(3)即 $\boldsymbol{BX}_1$ 为(按行)严格对角占优矩阵。于是作正对角阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1I_{n_1}, x_2I_{n_2}, \cdots, x_kI_{n_k})$，则 $\boldsymbol{AX}$ 为(按行)块严格对角占优阵。由式(3)知 $\boldsymbol{B}$ 为 H 矩阵，显然 B^T 也是 H 矩阵。又，正对角阵与 H 矩阵的乘积仍为 H 矩阵，所以 $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}^T$ 为H 矩阵。因而，存在正对角阵 $\boldsymbol{Q}_1$，使得 $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_1$ 按行严格对角占优阵，又 $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}^T$ 按列严格对角占优，因而 $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_1$，按行、按列均严格对角占优，这样，$(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_1)^T=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{BX}_1$ 也按行、按列均严格对角占优。于是，取

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\mathrm{diag}(x_1I_{n_1}, x_2I_{n_2}, \cdots, x_kI_{n_k})\\ \boldsymbol{Q}&=\mathrm{diag}(q_1I_{n_1}, q_2I_{n_2}, \cdots, q_kI_{n_k})\end{aligned}\qquad x_i, q_i>0, i\in K$$

则 $\boldsymbol{QAX}$ 为按行、按列均严格对角占优的。记 $\boldsymbol{T}\triangleq\boldsymbol{QAX}$，则 $\boldsymbol{E}\triangleq\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^T)$为块严格对角占优的

实对称矩阵。相应于 $\boldsymbol{A}$ 的分块形式(1),由 $\boldsymbol{A}_{ii}$为M矩阵知 $\boldsymbol{T}_{ii}$为M矩阵,因而 $\boldsymbol{E}_{ii}$为M矩阵。又 $\boldsymbol{E}$ 为块严格对角占优阵,根据文献[2]知

$$\lambda(\boldsymbol{E})>0$$

又 $\boldsymbol{E}$ 实对称,所以 $\boldsymbol{E}$ 对称正定。故 $\boldsymbol{T}$ 为亚正定矩阵,即 $\boldsymbol{QAX}$ 为亚正定阵。 证毕

若 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵,可以得到下列更好的结果。

定理4 设 $\boldsymbol{A}\in M(R)$为正规块H矩阵,$\boldsymbol{A}_{ii}$为M矩阵($i\in K$),向量范数取绝对范数,则 $\boldsymbol{A}$ 为亚正定阵。

证明 由 $\boldsymbol{A}$ 为块H矩阵,$\boldsymbol{A}_{ii}$($i\in K$)为M矩阵,根据文献[7]有

$$\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})>0$$

又 $\boldsymbol{A}$ 为正规阵知$\{\lambda(H(\boldsymbol{A}))\}=\{\mathrm{Re}\lambda(\boldsymbol{A})\}$,于是

$$\lambda(H(\boldsymbol{A}))>0$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为亚正定阵。 证毕

参考文献

1 Plemmon R J, Berman A. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. NY: Academic Press, 1992

2 Feingd G D, Varga R S. Block diagoal dominance and circle theorems. Pacific J Math, 1962, 12: 1 241~1 250

3 黄廷祝. 非奇H矩阵的简捷判据. 计算数学, 1993, 15(3): 318~328

4 屠伯埙. 亚正定矩阵理论(I). 数学学报, 1990, 33(4): 462~471

5 张家驹. 共轭对角占优矩阵的特征值分布. 数学学报, 1980, 23(4): 544~546

6 佟文廷. 关于几类矩阵的特征值分布. 数学学报, 1977, 20(4): 272~275

7 黄廷祝, 游兆永. 矩阵的块G—对角占优性. 工程数学学报, 1993, 10(3): 32~38

(Block) H—matrices and Sub-positive Definite Matrices

Huang Tinzhu Pu Hepin

(Dept. of Appl. Math., UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Both (Block) H-matrices and sub-positive definite matrices are the important matrices classes in numerical mathematics and matrix theory, which are applicable in many fields. In this paper, the intership is studied between the two matrices. The new results obtained are interesting in theory and practice.

Key words H-matix; sub-positive definite matrix; eigenvalue; norm

编辑 徐培红