

# 空间信号二维到达方向分离估计<sup>\*①</sup>

唐 斌<sup>\*\*</sup>

肖先赐

(西南石油学院自动化系 南充 637001) (电子科技大学电子工程系 成都 610054)

**【摘要】** 基于 L 型均匀线性阵列和 ESPRIT 算法提出了一种避免谱峰搜索的多个空间信号二维到达方向分离估计及其配对处理方法, 该方法可以并行实现。计算机模拟实验证实了其可行性。

**关键词** 方位角; 仰角; 算法; 阵列信号处理

中图分类号 TN711.72

高分辨、高精度的阵列信号处理由于是现代信号处理领域的重要研究方向, 十多年来引起了众多研究人员的极大兴趣。以 MUSIC 和 ESPRIT 算法为代表的高分辨阵列处理方法不仅得到了严格的理论证明和计算机模拟实验验证, 而且实验系统也有报道<sup>1,2]</sup>。但大部分已有的成果几乎都是以一维信号到达方向为前提得到的。在非远场空间信号定位处理过程中, 信号二维到达方向估计是至关重要的。80 年代中期以来, 针对这一研究课题虽然作了大量研究工作<sup>[3~9]</sup>, 但是所采用的方法要么基于 MUSIC 算法直接作 2-D 空间谱搜索, 要么基于平行阵列和 ESPRIT 算法(或其他算法)直接求解。但这些方法在计算时效、参数估计精度、分辨率和方位角的全方位估计等方面都不能兼顾。本文基于 L 型阵列和 ESPRIT 算法提出了一种既可避免直接搜索又能实现方位角的全方位估计的空间信号二维到达方向分离估计方法, 并且给出了对应的配对处理。同时, 在估计信号方位角和仰角中方法具有相同处理结构, 因此, 可以并行实现。计算机模拟实验验证了其可行性。

## 1 问题描述

假设空间有  $p$  个同中心频率的窄带信号照射, 每臂均由  $M+1$  个阵元等间隔组成的 L 型阵列。信号参数为  $(\theta_i, \varphi_i), i=1, 2, \dots, p$ , 其中  $\theta_i$  和  $\varphi_i$  分别代表第  $i$  个信号的方位角和仰角。假设阵元输出噪声是空一时统计独立的、零均值的和方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声, 且与信号不相关。阵列输出信号矢量分别为

$$X_1(t) = A_1(\theta, \varphi)S(t) + n_{X1}(t) \quad (1)$$

$$X_2(t) = A_1(\theta, \varphi)\Phi_1 S(t) + n_{X2}(t) \quad (2)$$

$$Y_1(t) = A_2(\theta, \varphi)S(t) + n_{Y1}(t) \quad (3)$$

$$Y_2(t) = A_2(\theta, \varphi)\Phi_2 S(t) + n_{Y2}(t) \quad (4)$$

式中  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  分别是子阵列  $X$ (阵列一臂)的前和后  $M$  个阵元输出信号构成的矢量;  $Y_1$

① 1997 年 9 月 9 日收稿, 1997 年 10 月 13 日修改定稿

\* 电子部预研基金资助项目

\*\* 男 33 岁 博士后 副教授

$(t)$  和  $Y_2(t)$  为子阵列  $Y$  (阵列另一臂) 的前和后  $M$  个阵元输出信号构成的矢量;  $n_{X1}(t)$ 、 $n_{X2}(t)$ 、 $x_{Y1}(t)$  和  $n_{Y2}(t)$  分别是对应的噪声矢量;  $S(t)$  是  $p$  个信号复包络构成的矢量。

$$A_k(\theta, \varphi) = [\alpha_{k1}(\theta, \varphi), \alpha_{k2}(\theta, \varphi), \dots, \alpha_{kp}(\theta, \varphi)] \quad k = 1, 2 \quad (5)$$

$$\alpha_{ki}(\theta, \varphi) = \left[ 1, \exp\left[-j \frac{2\pi d}{\lambda} \alpha_{ki}\right], \dots, \exp\left[-j(M-1) \frac{2\pi d}{\lambda} \alpha_{ki}\right] \right]^T \quad k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\Phi_k = \text{diag} \left[ \exp\left[-j \frac{2\pi d}{\lambda} \alpha_{k1}\right], \exp\left[-j \frac{2\pi d}{\lambda} \alpha_{k2}\right], \dots, \exp\left[-j \frac{2\pi d}{\lambda} \alpha_{kN}\right] \right] \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

式中  $\alpha_{1i} = \cos \theta_i \sin \varphi_i$ ;  $\alpha_{2i} = \sin \theta_i \sin \varphi_i$ ;  $d$  和  $\lambda$  分别代表阵元间隔和信号波长。

从上述的表达式可见, 除有 ESPRIT 算法结构外, 对角矩阵  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  的对角元素存在方位角三角函数差异。由此, 下面导出了空间信号二维到达方向分离估计方法。

## 2 二维到达方向估计方法

将子阵列  $X$  和子阵列  $Y$  的输出信号矢量分别组合为

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(\theta, \varphi) \\ A_1(\theta, \varphi) \Phi_1 \end{bmatrix} S(t) + \begin{bmatrix} n_{X1}(t) \\ n_{X2}(t) \end{bmatrix}_X = A_X(\theta, \varphi) S(t) + n_X(t) \quad (8)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(\theta, \varphi) \\ A_2(\theta, \varphi) \Phi_2 \end{bmatrix} S(t) + \begin{bmatrix} n_{Y1}(t) \\ n_{Y2}(t) \end{bmatrix} = A_Y(\theta, \varphi) S(t) + n_Y(t) \quad (9)$$

根据阵列输出噪声的假设,  $X(t)$  和  $Y(t)$  的空间自协差矩阵分别为

$$R_X = E\{X(t)X^H(t)\} = A_X(\theta, \varphi)R_S A_X^H(\theta, \varphi) + \sigma^2 \sum_n \quad (10)$$

$$R_Y = E\{Y(t)Y^H(t)\} = A_Y(\theta, \varphi)R_S A_Y^H(\theta, \varphi) + \sigma^2 \sum_n \quad (11)$$

其中  $E$  代表数学期望;  $H$  代表矩阵复共轭转置;  $\sum_n = \begin{bmatrix} I & J \\ J^H & I \end{bmatrix}$ ;  $R_S = \{S(t)S^H(t)\}$ ;  $I$  和  $J$  分别是  $M \times M$  阶的单位矩阵和上对角元素为 1、其他元素为 0 的矩阵。

为了简化叙述, 下面的推导以式(10)为基础。

如果  $A_X(\theta, \varphi)$  和  $R_S$  无秩亏, 即  $\text{Rank}(A_X(\theta, \varphi)R_S A_X^H(\theta, \varphi)) = p$ , 那么, 矩阵对  $(R_X, \sum_n)$  的广义特征分解有

$$\lambda_{X1} \geq \lambda_{X2} \geq \dots \geq \lambda_{XN} > \lambda_{Xp+1} = \dots = \lambda_{X2M} = \sigma^2 \quad (12)$$

$$\text{span}\{v_{X1}, v_{X2}, \dots, v_{Xp}\} \perp \text{span}\{v_{Xp+1}, v_{Xp+2}, \dots, v_{X2M}\} \quad (13)$$

$$\text{或} \quad \text{span}\{v_{X1}, v_{X2}, \dots, v_{Xp}\} = \text{span}\{A_X(\theta, \varphi)\} \quad (14)$$

其中  $\{\lambda_{Xi}, i = 1, 2, \dots, 2M\}$  和  $\{v_{Xi}, i = 1, 2, \dots, 2M\}$  分别是矩阵对  $(R_X, \sum_n)$  的特征值和特征矢量。

于是, 有

$$[v_{X1}, v_{X2}, \dots, v_{Xp}] = A_X(\theta, \varphi) C_X^{-1} \quad (15)$$

式中  $C_X$  是  $p \times p$  阶非奇异矩阵。

将式(15)左端分成两个  $M \times p$  阶子阵块  $E_{X1}$  和  $E_{X2}$ , 根据式(8)有

$$E_{X1} = A_1(\theta, \varphi)C_X \quad (16)$$

$$E_{X2} = A_1(\theta, \varphi)\Phi_1 C_X = A_1(\theta, \varphi)C_X(C_X^{-1}\Phi_1 C_X) = E_{X1}\Psi_X \quad (17)$$

其中  $\Psi_X = C_X^{-1}\Phi_1 C_X$ 。由此可见, 对角矩阵  $\Phi_1$  的对角元素是矩阵  $\Psi_X$  的特征值。

由于  $A_1(\theta, \varphi)$  无秩亏, 因此有

$$[E_{X1}, E_{X2}]W_X = 0 \quad (18)$$

其中  $W_X$  是  $2p \times p$  阶满列秩矩阵。

将  $W_X$  分为两个  $p \times p$  阶子矩阵块  $W_{X1}$  和  $W_{X2}$ , 并根据式(16)~(18), 得

$$-W_{X1}W_{X2}^{-1} = C_X^{-1}\Phi_1 C_X \quad (19)$$

这样,  $\Psi_X = -W_{X1}W_{X2}^{-1}$ 。

根据式(16)、(17)和  $A_1(\theta, \varphi)$  无秩亏, 容易证明,  $E_X = [E_{X1}, E_{X2}]^H [E_{X1}, E_{X2}]$  的秩等于  $p$ , 且非负定 Hermite。其特征分解为

$$E_X u_i = \eta_i u_i = 0 \quad i = p+1, p+2, \dots, 2p \quad (20)$$

其中  $\{\eta_i, i=1, 2, \dots, p\}$  和  $\{u_i, i=1, 2, \dots, p\}$  分别是  $E_X$  的特征值和对应的特征矢量。

不难看出, 式(20)等效为

$$[E_{X1}, E_{X2}][u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{2p}] = 0 \quad (21)$$

比较式(18)和式(21), 得到  $W_X = [u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{2p}]$ 。

同理, 由式(11)得到  $\Psi_Y = C_Y^{-1}\Phi_2 C_Y$ , 其中  $C_Y$  是非奇异矩阵。于是, 根据对角矩阵  $\Phi_1$  与  $\Phi_2$  定义式(7)和上面结果, 有

$$\exp\left[-j\frac{2\pi d}{\lambda}\alpha_{ki} = \xi_{ki} \quad k = 1, 2; i = 1, 2, \dots, p\right] \quad (22)$$

其中  $\{\xi_{ki}, k=1, 2; i=1, 2, \dots, p\}$  分别是矩阵  $\Psi_X$  和  $\Psi_Y$  的特征值。

求解式(22), 信号方位角和仰角分别为

$$\theta_i = \text{tg}^{-1}\left[\frac{\arg(\xi_{2i})}{\arg(\xi_{1i})}\right] \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (23)$$

$$\varphi_i = \sin^{-1}\left\{\frac{\lambda}{2\pi d}\sqrt{(\arg(\xi_{1i}))^2 + (\arg(\xi_{2i}))^2}\right\} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (24)$$

其中  $\arg(\cdot)$  代表复数复角运算。

由于式(24)的主值区域是  $(-\pi/2, \pi/2)$ , 因此, 方位角的全方位估计需视  $\Psi_X$  和  $\Psi_Y$  的特征值复角所在象限而定。此外, 子阵列  $X$  和  $Y$  的输出信号矢量具有不同的列空间  $A_1(\theta, \varphi)$  和  $A_2(\theta, \varphi)$ , 所以, 式(23)、式(24)的元素并非一一对应, 需配对处理。其配对方法如下:

从式(13)可知, 正确的配对信号二维到达方向为

$$(\theta_k, \varphi_k) = \underset{\substack{\theta \in \{\theta_i, i=1, 2, \dots, p\} \\ \varphi \in \{\varphi_i, i=1, 2, \dots, p\}}}{\text{argmin}} \left\| \sum_{j=p+1}^{2M} v_{Xj}^H \alpha_1(\theta, \varphi) \right\|^2 \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (25)$$

其中  $\alpha_1(\theta, \varphi)$  是矩阵  $A_X(\theta, \varphi)$  的列矢量。

从上面的讨论过程中看出, 空间自协方差矩阵计算和矩阵对特征分解都有并行处理特点, 因此, 方法可以并行实现, 以进一步增强时效。

### 3 计算机模拟

为了验证本文方法的有效性,我们做了下面的计算机模拟实验。实验中,  $M=8$ ,  $d/\lambda=1/2$ 。

#### 3.1 非相干信号的二维到达方向估计

三个彼此独立的窄带信号分别为  $(30^\circ, 60^\circ)$ 、 $(110^\circ, 70^\circ)$  和  $(250^\circ, 30^\circ)$ , 快拍数为 150, 信噪比  $SNR=10$  dB。100 次 Monte Carlo 实验结果示于表 1。

#### 3.2 相干信号的二维到达方向估计

三个窄带信号分别为  $(55^\circ, 80^\circ)$ 、 $(230^\circ, 75^\circ)$  和  $(240^\circ, 60^\circ)$ , 其中后两个信号相干。快拍数为 200。信噪比  $SNR=15$  dB。空间平滑预处理阵列长度等于  $5^{[7]}$ 。100 次 Monte Carlo 实验结果示于表 2。

表 1 非相干信号的二维到达方向估计

	$s_1(t)$		$s_2(t)$		$s_3(t)$	
	$\theta/(\circ)$	$\varphi/(\circ)$	$\theta/(\circ)$	$\varphi/(\circ)$	$\theta/(\circ)$	$\varphi/(\circ)$
真 值	30	60	110	70	250	30
均 值	30.009	60.006	110.378	69.945	250.106	29.994
标准差	0.106 7	0.197 9	0.176 0	0.276 2	0.227 8	0.109 4

表 2 相干信号的二维到达方向估计

	$s_1(t)$		$s_2(t)$		$s_3(t)$	
	$\theta/(\circ)$	$\varphi/(\circ)$	$\theta/(\circ)$	$\varphi/(\circ)$	$\theta/(\circ)$	$\varphi/(\circ)$
真 值	55	80	230	75	240	60
均 值	55.124	79.676	230.890	76.045	240.886	58.671
标准差	0.457 4	0.832 9	0.740 3	1.265 4	0.903 7	1.617 9

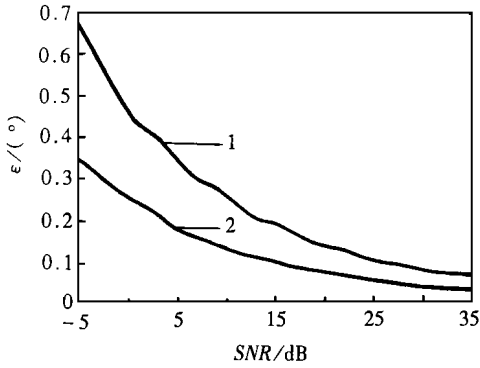
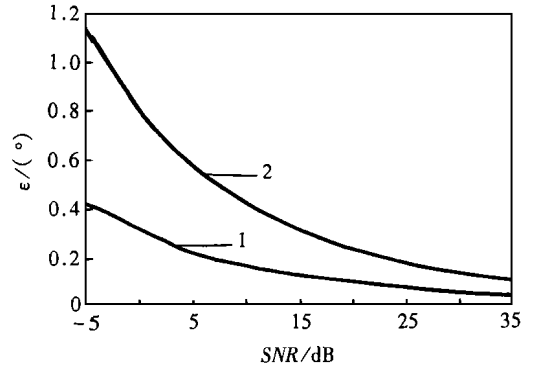
#### 3.3 信噪比 $SNR$ 对二维到达方向估计均方根误差 $\epsilon$ 的影响

两个独立的窄带信号为  $(62^\circ, 35^\circ)$  和  $(25^\circ, 75^\circ)$ 。快拍数为 100。100 次 Monte Carlo 实验统计结果示于图 1 和图 2。其中, 曲线 1 对应信号 1, 曲线 2 对应信号 2。

以上实验表明, 空间信号二维到达方向分离估计方法不管是非相干信号, 还是相干信号都表现出良好的估计性能。但是, 仰角估计性能较方位角估计性能稍差。

### 4 结束语

本文基于 L 型阵列和 ESPRIT 算法提出的多个空间信号二维到达方向分离估计方法不仅避免了空间谱搜索, 而且实现了方位角的全方位估计。此外, 方法的并行处理能力使得二维问题处理时间与一维问题接近。它向空间信号二维到达方向估计实用化前进了一步。

图1 方位角估计  $\varepsilon \sim SNR$  曲线图2 仰角估计  $\varepsilon \sim SNR$  曲线

### 参 考 文 献

- 1 Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Trans AP, 1986, 34(3) : 276 ~ 280
- 2 Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. Opt Eng, 1990, 29(4) : 296 ~ 313
- 3 Ober P B, Deprettere E F, Veen A J V D. Efficient methods compute azimuth and elevation in high resolution estimation. Proc ICASSP, 1991 : 3 349 ~ 3 352
- 4 Sakarya F A, Hayes M H. Estimation 2-D angles of arrival using overlapping volume arrays. Proc ICASSP, 1991 : 3 353 ~ 3 356
- 5 殷勤业, 邹理和, Newcomb R W. 一种高分辨二维信号参量估计方法. 通信学报, 1991, 2(1) : 1 ~ 7
- 6 鲍晓红, 黄秀坤. 一种新的二维空间谱估计方法: 二维组合阵列 ESPRIT 方法. 信号处理, 1992, 8(1) : 22 ~ 30
- 7 Shan T J, Wax M, Kailath T. On spatial smoothing of estimation coherent signal. IEEE Trans ASSP, 1985, 33(6) : 806 ~ 811

## Separable Method for Estimation Signal 2-D Directions of Arrival

Tang Bin

(Dept. of Automation, Southwest Petroleum Institute Nanchong 637001)

Xiao Xianci

(Dept. of Electronic Eng., UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** Based on a uniform linear L-typical signal received array and ESPRIT algorithm, a new separable method for estimating two-dimensional (2-D) directions of arrival of multiple narrow-band spatial signals simultaneously is proposed in this paper. A paring method of azimuth and elevation of signals is given as well. Since the estimation of azimuth has the same architecture as the estimation of elevation of signals, it can be realized in parallel way. The simulation results on computer confirm its availability.

**Key words** azimuth; elevation; algorithm; array signal processing

编辑 叶红