

资本预算模型的影子价格分析^{*①}

曾 勇^{**} 张丽琼 唐小我

(电子科技大学管理学院 成都 610054)

【摘要】 对一类考虑股息分配的资本预算模型进行了影子价格分析,指出了影子价格在确定项目接受条件、资本成本以及调整股息分配与终期财富等方面的意义和作用。

关键词 资本预算; 影子价格; 股息; 终期财富

中图分类号 F224.3; F224.5

资本预算一般是指对投资项目的评价和选择,但具体在工程经济和公司理财中则有两种含义。一种含义基于完善的资本市场,在这样的市场上,完备的信息和充分的竞争使投资者具有以单一和固定的借、贷利率无限制地贷入或借出资金的能力,从而分离定理成立,进而项目的财务评价无需考虑企业拥有者(股东)千差万别的效用偏好,只需专注于净现值为正的项目即可达到项目财务决策和公司理财的基本目标——企业价值也即企业拥有者财富的最大化^[1,2]。但在实际资本市场上,借、贷利率总是不同的,而且其差幅随市场的不完善程度而增加(有时是以隐形的形式);更重要的是贷款机会并不是无限的,既使能在较大范围内获得贷款,利率也不大可能是单一固定的,这就涉及到资本预算的第二种含义即资本预算限制或资本限额问题。资本预算模型即在资本限额条件下多个项目的组合选择模型。自 Baumol 和 Quandt 基于净现值最大化提出第一个资本预算模型——纯资金配额(Pure Capital Rationing-PCR)模型以来,已提出了各种资本预算模型和技术,并存在着一些争议和问题有待解决^[3~5]。本文着重对一类考虑股息分配的资本预算模型进行了影子价格分析,指出了影子价格在确定项目接受条件和资本成本以及调整股息分配与终期财富等方面的意义和作用。

1 库恩——塔克条件的经济意义

本文涉及的资本预算模型为非线性二次规划模型,库恩——塔克条件为其最优解的充要条件。下面直观给出库恩——塔克条件的经济解释。

设 m 种资源约束下的价值最大化问题为

$$\begin{cases} \max f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t. } g_i(\mathbf{x}) \leq M_i \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 n 维决策向量, $f(\mathbf{x})$ 为价值函数, $g_i(\mathbf{x})$ 为第 i 种资源的消耗函数, M_i 为资源 i 的限额。

① 1997年7月17日收稿,1998年2月17日修改定稿

* 国家杰出青年科学基金资助项目

** 男 34岁 硕士 教授

由库恩——塔克条件^[6]可知式(1)最优解满足

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \gamma_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) \\ \gamma_j^* [M_j - g_j(\mathbf{x}^*)] = 0 & j = 1, 2, \dots, m \\ \gamma_j^* \geq 0, g_j(\mathbf{x}^*) \leq M_j & j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

式中 γ_j 为对应于不等式约束的库恩——塔克乘子, *表示最优解。

最优解时资源限额 M_i 对价值 f 的边际贡献即 M_i 的影子价格为

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial M_i} = \nabla f(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial M_i} = \sum_{j=1}^n \gamma_j^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial M_i} \quad (3)$$

由式(2)可得出, 当 $\gamma_j^* > 0$ 时, $g_j(\mathbf{x}^*) = M_j$, 从而

$$\nabla g_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial M_i} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)并考虑到 γ_j^* 为零的情况得

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial M_i} = \gamma_i^* \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

由式(5)可以得出, 库恩——塔克乘子就是影子价格。当 $\gamma_i^* > 0$ 时, 第 i 种资源为稀缺资源 ($g_i(\mathbf{x}^*) = M_i$), 其影子价格为正; 当第 i 种资源为剩余资源 ($g_i(\mathbf{x}^*) < M_i$) 时, 其影子价格为零。影子价格与市场价格的相对大小决定了企业应购进还是卖出资源以取得套利价值。当影子价格与市场价格相等时, 资源市场达到均衡。

2 资本预算模型的影子价格分析

2.1 资本预算模型

文献[5]给出了一个考虑股息分配和终期财富的资本预算模型, 其目标函数设定为

$$\max U = \frac{G}{c_N} + \sum_{n=0}^N \frac{D_n}{c_n} - p_1 \sum_{n=1}^N (D_n - D_{n-1})^2 - p_2 \left(\frac{IG}{c_N} - D_{ave} \right)^2 \quad (6)$$

式中 N 为计划末期(终期), $c_n = (1+i)^n$ 为第 n 期现金的折现因子, i 为反映公司所有者时间偏好的折现率, D_n 为第 n 期公司分配的股息; G 为终期财富, 反映计划期后公司盈利和股息分配的能力, $G = \sum_{j=1}^J \hat{a}_j x_j + v_N - w_N$, x_j 为项目 j 的选择变量, $0 \leq x_j \leq 1$, \hat{a}_j 为项目 j 计划期后的现金流按折现率 i 折合到第 N 期的价值, v_N 和 w_N 分别为第 N 期的借出和贷入额; $D_{ave} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{D_n}{c_n}$ 为平均现值股息; I 为将 G 逆转为固定的、终身年股息流的折现率, 即 $G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D'}{(1+I)^n} = \frac{D'}{I}$, $D' = IG$, 一般选 $I \approx i$; 罚因子 p_1 和 p_2 均为正。

式(6)的第1、2项为终期财富和计划期内股息流的现值总和, 第3项反映对计划期内股息分配平稳性的要求, 第4项是对计划期内股息分配与计划期后盈利(股息分配)能力不平衡的惩罚。因此式(6)目标函数为考虑分红派息平稳性并兼顾计划期内消费和计划期后盈利的现值最大化。但文献[5]未对有关模型影子价格作详细分析, 尤其是未对式(6)第3、4项的作用和意义进行经济分析。此外, 式(6)第3项未考虑折现, 而第4项却又采用现值, 这将造成终期前后的股息流出现跳变, 其合理性难以解释。还有, 式(6)第3项的表达式也不便于影子价格分析。基于以上原因, 本文

对式(6)目标函数作以下两种修改。

第一种修改是仅考虑股息流的平稳性,不考虑折现因素,式(6)修改为

$$\max U = \frac{G}{c_N} + \sum_{n=0}^N \frac{D_n}{c_n} - p_1 \sum_{n=0}^N (D_n - D)^2 - p_2 (IG - D)^2 \quad (7)$$

式中

$$D = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n$$

第二种修改是考虑现值股息流的平稳性,式(6)修改为

$$\max U = \frac{G}{c_N} + \sum_{n=0}^N \frac{D_n}{c_n} - p_1 \sum_{n=0}^N \left(\frac{D_n}{c_n} - \bar{D}_{ave} \right)^2 - p_2 \left(\frac{IG}{c_N} - \bar{D}_{ave} \right)^2 \quad (8)$$

考虑到资本市场的不完善性,资本预算模型的约束条件表示为

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^J a_{nj} x_j - (1 + l_{n-1}) v_{n-1} + v_n + (1 + b_{n-1}) w_{n-1} - w_n + D_n \leq M_n & n = 0, 1, \dots, N \\ x_j \leq 1 & j = 1, 2, \dots, J \\ w_n \leq B_n & n = 0, 1, \dots, N \\ x_j, v_n, w_n, D_n \geq 0 & j = 1, 2, \dots, J; n = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (9)$$

式中 a_{nj} 为项目 j 第 n 期的净现金流入; v_n 和 w_n 分别为第 n 期的借出和贷入额, l_n 和 b_n 为相应的借、贷利率, 一般有 $l_n < b_n$, M_n 为第 n 期资本预算限额; B_n 为贷款限额。这里, 文献[5]的约束条件略作了修改, 去掉了原文中对最低股息的要求, 加入了贷款限额约束。另外, 实际情况还涉及项目的有限可分和资金的斜向供应方式, 因与本文内容关系不大, 故未考虑。

2.2 影子价格分析

下面先对式(7)和式(9)组成的资本预算模型进行影子价格分析。由此构造广义拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L = & -\frac{G}{c_N} - \sum_{n=0}^N \frac{D_n}{c_n} + p_1 \sum_{n=0}^N (D_n - D)^2 + p_2 (IG - D)^2 - \sum_{j=1}^J \mu_j (1 - x_j) - \sum_{n=0}^N \beta_n (B_n - w_n) - \\ & \sum_{n=0}^N \rho_n [M_n + \sum_{j=1}^J a_{nj} x_j + (1 + l_{n-1}) v_{n-1} - v_n - (1 + b_{n-1}) w_{n-1} + w_n - D_n] - \\ & \sum_{j=1}^J \alpha_j x_j - \sum_{n=0}^N \theta_n v_n - \sum_{n=0}^N \eta_n w_n - \sum_{n=0}^N \gamma_n D_n \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\rho_n, \mu_j, \beta_n, \alpha_j, \theta_n, \eta_n, \gamma_n \geq 0$, 为相应的库恩——塔克乘子。

由库恩——塔克条件可得最优解条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\hat{a}_j}{c_N} - \sum_{n=0}^N a_{nj} \rho_n^* + \mu_j^* - \alpha_j^* + 2p_2 (IG^* - D^*) \hat{a}_j = 0 \quad 1 \leq j \leq J \quad (11)$$

$$(x_j^* \alpha_j^* = 0, \mu_j^* (1 - x_j^*) = 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_n} = \rho_n^* - (1 + l_n) \rho_{n+1}^* - \theta_n^* = 0 \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (12)$$

$$(\theta_n^* v_n^* = 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = -\rho_n^* + (1 + b_n) \rho_{n+1}^* + \beta_n^* - \eta_n^* = 0 \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (13)$$

$$(\eta_n^* w_n^* = 0, \beta_n^* (B_n - w_n^*) = 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_N} = -\frac{1}{c_N} + 2p_2(IG^* - D^*)I + \rho_N^* - \theta_N^* = 0 \quad (14)$$

$$(v_N^* \theta_N^* = 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_N} = \frac{1}{c_N} - 2p_2(IG^* - D^*)I - \rho_N^* - \eta_N^* + \beta_N^* = 0 \quad (15)$$

$$(\eta_N^* w_N^* = 0, \beta_N^*(B_N - w_N^*) = 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial D_n} = -\frac{1}{c_n} + 2p_1(D_n^* - D^*) - \frac{2p_2}{N+1}(IG^* - D^*) + \rho_n^* - \gamma_n^* = 0 \quad 0 \leq n \leq N \quad (16)$$

$$(\gamma_n^* D_n^* = 0)$$

由式(11)可得

$$\mu_j^* = \sum_{n=0}^N a_{nj} \rho_n^* + \frac{\hat{a}_j}{c_N} + 2p_2 I \hat{a}_j (D^* - IG^*) + \alpha_j^* \quad (17)$$

由库恩——塔克乘子的经济意义可知, μ_j^* 表示项目 j 的机会价值或放弃项目 j 的机会损失, ρ_n^* 为第 n 期资金的影子价格。若终期前后的股息流保持平衡 ($D^* = IG^*$), 则式(17)表示项目 j 被接受 ($x_j^* > 0, \alpha_j^* = 0$) 的条件是其计划期内净现金流入的影子价值与计划期后项目现金流入的现值总和 (等于 μ_j^*) 必须非负, 且部分接受时 ($0 < x_j^* < 1, \mu_j^* = 0$) 该总和值为零; 反之, 放弃项目 j ($x_j^* = 0, \mu_j^* = 0, \alpha_j^* \geq 0$) 的条件是该总和值非正。当终期前后股息流不平衡时, 式(17)的第3项将起作用, 若 $D^* > IG^*$, 则各项目被接受的条件将放松, 这意味着计划期内的公司盈利将更多用于项目投资从而使股息分配减少; 反之, 若 $D^* < IG^*$, 各项目更容易被排斥, 这意味着计划期内将有更多的股息分配。以上分析说明了式(7)中的第4项如何通过改变项目被接受的条件来调整终期前后股息流的平稳性。

由式(12)和式(13)可得

$$1 + l_n \leq \frac{\rho_n^*}{\rho_{n+1}^*} \leq 1 + b_n + \frac{\beta_n^*}{1 + b_n} \quad (18)$$

式中 ρ_n^* / ρ_{n+1}^* 表示资本的影子折现率。由式(12)和式(13)以及 v_n^* 和 w_n^* 不可能同时为正可知, 当 $v_n^* > 0$ 时, 式(18)左边不等式为等式, 影子折现率反映借款利率; 当 $w_n^* > 0$ 时, 式(18)右边不等式为等式, 影子折现率反映贷款利率, 且当贷款额度全部使用时 ($w_n^* = B_n^*, \beta_n^* \geq 0$), 影子折现率一般将高于现行贷款本息率, 即投资者愿以更高的利率取得进一步贷款。可见, 影子折现率反映了合理的资本成本。

由式(14)和式(15)整理得

$$\rho_N^* = \frac{1}{c_N} + 2p_2 I (D^* - IG^*) + \theta_N^* = \frac{1}{c_N} + 2p_2 I (D^* - IG^*) + \beta_N^* - \eta_N^* \quad (19)$$

当第 N 期贷款额度未全部使用时 ($w_N^* < B_N^*$), $\beta_N^* = 0$, 为使式(19)成立, 必有 $\theta_N^* = \eta_N^* = 0$ 。此时, 当终期前后股息流达到平衡时 ($D^* = IG^*$), 终期资金在终期的影子价格 ($c_N \rho_N^*$) 为 1, 即终期一元钱的价值就是一元钱。但当 $D^* > IG^*$ 时, $c_N \rho_N^* > 1$, 即终期一元钱的价值大于一元钱, 这意味着应减少计划期内的股息分配, 以减轻终期的预算压力和增加终期财富; 反之, 当 $D^* < IG^*$ 时, $c_N \rho_N^* < 1$, 则应加强终期预算限制, 减少终期财富, 增加计划期内的股息分配。以上分析说明了式(7)中的第4项如何通过改变终期资金的影子价格来调整终期前后股息流的平衡。

当 N 期贷款额度全部使用且 $\beta_N^* > 0$ 时, $\eta_N^* = 0, \theta_N^* = \beta_N^*$, 终期资金的影子价格得到一个 β_N^*

的升值,这意味着将比 $\beta_N^* = 0$ 时放弃更多的计划期内消费以满足终期对资金的需求。

再由式(16)可得

$$\rho_n^* = \frac{1}{c_n} - 2p_1(D_n^* - D^*) + \frac{2p_2}{N+1}(IG^* - D^*) + \gamma_n^* \quad (20)$$

当 $D_n^* > 0$ 时, $\gamma_n^* = 0$ 。若 $IG^* = D^*$ 且 $D_n^* = D^*$, 则第 n 期资金在第 n 期的影子价格 ($c_n \rho_n^*$) 为 1; 当第 n 期股息高于平均值时, $c_n \rho_n^* < 1$, 这意味着应加强第 n 期预算压力, 从而减少第 n 期股息分配; 反之, 则应增加第 n 期股息分配。若 $IG^* > D^*$, 则计划期内各期资金的影子价格均得到提升, 这表明应通过减少终期财富来增加计划期内各期的资本预算; 反之, 则应减少计划期内的资本预算, 增加终期财富。当 $D_n^* = 0$ 时, 一般有 $\gamma_n^* > 0$, ρ_n^* 将有 γ_n^* 的升值, 第 n 期的预算限额应放松, 第 n 期的股息将增加。对式(20)的分析说明了式(7)中的第 3、4 项如何通过改变计划期内资金的影子价格来调整计划期内和终期前后股息流的平稳性。

对于式(7)和式(9)构成的资本预算模型可作类似的分析, 其结论是一致的, 下面仅给出有关的表达式。

$$\mu_j^* = \sum_n a_{nj} \rho_n^* + \frac{\hat{a}_j}{c_N} + 2p_2 I \hat{a}_j (D_{ave}^* - \frac{IG^*}{c_N}) + \alpha_j^* \quad (21)$$

$$1 + l_n \leq \rho_n^* / \rho_{n+1}^* \leq 1 + b_n + \beta_n^* / (1 + b_n) \quad (22)$$

$$\rho_N^* = \frac{1}{c_N} + \frac{2p_2 I}{c_N} (D_{ave}^* - \frac{IG^*}{c_N}) + \theta_N^* = \frac{1}{c_N} + \frac{2p_2 I}{c_N} (D_{ave}^* - \frac{IG^*}{c_N}) + \beta_N^* - \eta_N^* \quad (23)$$

$$\rho_n^* = \frac{1}{c_n} - \frac{2p_1}{c_n} (\frac{D_n^*}{c_n} - D_{ave}^*) + \frac{2p_2}{(N+1)c_n} (\frac{IG^*}{c_N} - D_{ave}^*) + \gamma_n^* \quad (24)$$

其他条件同前。

3 结束语

本文给出了库恩——塔克乘子的直观经济意义, 对一类资本预算模型进行了影子价格分析, 着重从项目接受条件和资金影子价格等角度指出了模型目标函数中的惩罚项在调整股息分配的平稳性以及计划期内消费与计划期后盈利能力之间的平衡等方面的作用和意义, 文中的分析有助于正确理解资本预算模型的经济意义和构造新的资本预算模型, 有关分析方法也扩展了投资项目评价的思路。

最后需要指出的是, 本文主要是从性质特征上进行定性分析, 有兴趣的研究者可根据本文的结论, 采用二次规划及其对偶规划的程序对文献[5]的有关案例作进一步的定量讨论。此外, 本文涉及的主要是确定型资本预算模型, 对于随机型资本预算模型的讨论还有待进行。

感谢智勇先生在与作者讨论中给予的启发和建议。

参 考 文 献

- 1 Lumby S. Investment appraisal and related decisions. London: Thomas Nelson & Sons Ltd, 1981
- 2 陈小悦, 乌红山. 公司理财学基础. 北京: 清华大学出版社, 1994
- 3 Weingartner H M. Capital rationing 'n authors in search of a plot. Journal of Finance, 1977, 32(5): 1 403 ~ 1 431
- 4 De Gulii M E, Magnani U. Some open problems in pure capital rationing theory. The Engineering E-

conomist, 1995, 41(1):77~89

5 Park C S, Sharpe-Bette G P. Advanced Engineering Economics. New York:John Wiley & Sons, 1990

6 钱颂迪主编, 运筹学(修订版). 北京:清华大学出版社, 1990

Analysis of Shadow Prices of Capital Budgeting Models

Zeng Yong Zhang Liqiong Tand Xiaowo
(Management College UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Capital budgeting models are important to project selection and combination from multiple alternatives when there are budget and borrowing limits imposed during several time periods, and difference between the interest rates for lending and borrowing. In this paper, Murgá's capital budgeting model that considers dividends and terminal wealth is revised to consider the steadiness of the dividend stream better. The shadow prices of the revised models are analyzed and their importance in determining the project acceptance conditions and capital cost and in regulating the dividend stream and the terminal wealth is pointed out based on Kuhn-Tucker condition and the economic interpretation of Kuhn-Tucker multipliers.

Key words capital budgeting; shadow price; dividend; terminal wealth

编辑 黄 辛

·科研成果介绍·

数据会议系统

主研人员 敬万钧 谭 浩 周明天 万 竞 尚晋钢

该成果适用于工业、科研、教育、行政管理、军事指挥等部门,通过计算机网络,实现声音、图形、图像等媒体信息的实时、交互通信。该系统具有下述主要功能和特点:

- 1) 该系统工作于 UNIX 平台,在局域网环境下,实现了 SUN-SGI 工作站之间的声音、图形、图像点对点的双向传输。
- 2) 系统的远程会话使异地用户可实时地进行交谈,并可记录谈话内容。
- 3) 系统的文档会议功能完善,使用方便,异地用户通过电子白板,可见相同内容文档,进行讨论、删改,并能进行语言注释。
- 4) 在设计中实现了对对象的链接和嵌入。

·科 卜·