两类线排列计数问题的统一公式 *①

蒲和平**　　黄廷祝
（电子科技大学应用数学系　成都　610054）

【摘要】 在长度为 n, 具有 m 个水平的线排列中, 其最大游程长与最小游程长分别满足一定限制条件的数列计数问题存在一定的联系, 给出了这两类计数问题的统一公式, 得到了一个组合恒等式。

关 键 词　线排列；　最小游程长；　最大游程长；　计数问题
中图分类号　O157

文献[1～3] 研究了由 m 个数字 $1, 2, \cdots, m$ 作成的长度为 n 而最大游程长小于 l 的线排列计数问题, 文献[4] 研究了最小游程长不小于 l 的线排列计数问题, 本文就这两类计数的统一形式及一些相关问题进行讨论。

我们沿用文献[1～4] 中的记号, 并给出一些相关概念如下。

定义 1　m 元集$\{1, 2, \cdots, m\}$可重复作 n 元排列, 所有不同数列所成的集记为 $\Omega(n, m)$。

定义 2　$\Omega(n, m, l)$与 $G(n, m, l)$分别为 $\Omega(n, m)$中最大游程长小于 l 和恰为 l 的数列之集; $\Omega(n, m, l)$与 $G(n, m, l)$分别为 $\Omega(n, m)$中最小游程长大于或等于 l 和恰为 l 的数列之集。

定义 3　$\Omega(n, m; l_1, l_2)(l_1 \leqslant l_2)$为 $\Omega(n, m)$中最小游程长大于或等于 l_1, 最大游程长小于 l_2 的数列之集;

$G(n, m; \underline{l_1}, l_2)$为 $\Omega(n, m)$中最小游程长恰为 l_1, 而最大游程长小于 l_2 的数列之集;

$G(n, m; l_1, \overline{l_2})$为 $\Omega(n, m)$中最小游程长大于或等于 l_1 而最大游程长恰为 l_2 的数列之集。

定义 4　设 A 为一集合, $f(A)$规定为 A 中元素的个数。

约定　文中出现的 n、m、l、l_1、l_2 均为正整数且满足 $m \geqslant 2$, $l_1 < l_2 \leqslant n$; 对整数 α、β, 若 $\alpha < 0$ 或 $\beta < 0$, 以及 $\alpha < \beta$ 时, $\binom{\alpha}{\beta} = 0$。

1　主要结果

定理 1

$$f(\Omega(n, m; l_1, l_2)) = m \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{l_1}\right]} (m-1)^{k-1} \sum_{r \geqslant 0} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k-1}{k-1} \tag{1}$$

① 1997 年 6 月 14 日收稿, 1997 年 7 月 22 日修改定稿

* 四川省青年科技基金资助项目, 基金号: JSA 1081

** 男　39 岁　硕士　副教授

证明　将长度 n 作 k 部分有序分拆,其中每部分的长度都大于或等于 l_1 且小于 l_2,这些分拆的种数记为 $P_{n,k}^{(l_1, l_2)}$,则 $\Omega(n, m; l_1, l_2)$中恰有 k 个游程的数列个数为 $m(m-1)^{k-1}P_{n,k}^{(l_1, l_2)}$。

因 $P_{n,k}^{(l_1, l_2)}$ 的生成函数为$(x^{l_1}+x^{l_1+1}+\cdots+x^{l_2-1})^k$,故 $f(\Omega(n, m; l_1, l_2))$是展开式

$$u(x)=\sum_{i=0}^{\infty} m(m-1)^{i-1}(x^{l_1}+x^{l_1+1}+\cdots+x^{l_2-1})^i$$

中 x^n 的系数。而

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} m(m-1)^{i-1}\left(\frac{x^{l_1}-x^{l_2}}{1-x}\right)^i=\frac{m}{m-1}\left[1-\frac{(m-1)(x^{l_1}-x^{l_2})}{1-x}\right]^{-1}=\\
&\frac{m}{m-1}\,\frac{1-x}{1-x-(m-1)(x^{l_1}-x^{l_2})}=\\
&\frac{m(1-x)}{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}[x+(m-1)(x^{l_1}-x^{l_2})]^i=\\
&\frac{m(1-x)}{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(m-1)^k(x^{l_1}-x^{l_2})^k x^{i-k}=\\
&\frac{m(1-x)}{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(m-1)^k\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^r x^{l_2 r}x^{l_1(k-r)}x^{i-k}=\\
&\frac{m(1-x)}{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{i}{k}\binom{k}{r}(m-1)^k x^{i+(l_2-l_1)r+(l_1-1)k}
\end{aligned}$$

令 $i+(l_2-l_1)r+(l_1-1)k=n$,由于 $i\geqslant 0$, $r\geqslant 0$,故有 $k\leqslant\frac{n}{l_1-1}$,所以

$$u(x)=\frac{m(1-x)}{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{l_1-1}\right]}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r(m-1)^k\binom{k}{r}\binom{n-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k}{k}x^n$$

于是

$$\begin{aligned}
f(\Omega(n, m; l_1, l_2)) = &\; m\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{l_1-1}\right]}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r(m-1)^{k-1}\binom{k}{r}\binom{n-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k}{k}-\\
&\; m\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{l_1-1}\right]}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r(m-1)^{k-1}\binom{k}{r}\binom{n-1-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k}{k}=\\
&\; m\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{l_1-1}\right]}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r(m-1)^{k-1}\binom{k}{r}\left[\binom{n-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k}{k}-\binom{n-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k-1}{k}\right]=\\
&\; m\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{l_1-1}\right]}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r(m-1)^{k-1}\binom{k}{r}\binom{n-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k-1}{k-1}
\end{aligned}$$

注意　在求和中应有 $n-(l_2-l_1)r-(l_1-1)k-1\geqslant k-1,\ r\geqslant 0$，所以 $k\leqslant\dfrac{n}{l_1}$，故式(1)成立。

显然，该定理给出的算式是文献[2]中的算式 $f(\Omega(n,m,l))$ 与文献[4]中的算式 $f(\overline{\Omega}(n,m,l))$ 统一形式的推广，容易看出以下结论成立。

定理 2

$$f(\Omega(n,m;1,l))=f(\Omega(n,m,l)) \tag{2}$$

$$f(\Omega(n,m;l,n+1))=f(\overline{\Omega}(n,m,l)) \tag{3}$$

$$f(\Omega(n,m;1,n+1))=f(\Omega(n,m)) \tag{4}$$

定理 2 的结论是显然的。下面验证等号两边在计算形式上也完全保持一致。

由定理 1 得

$$f(\Omega(n,m;1,l))=m\sum_{k=1}^{n}(m-1)^{k-1}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{n-(l-1)r-1}{k-1}$$

这便是文献[2]中定理 7 所给出的 $f(\Omega(n,m,l))$。

另外

$$f(\Omega(n,m;l,n+1))=m\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor}(m-1)^{k-1}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^k\binom{k}{r}\binom{n-(n+1-l)r-(l-1)k-1}{k-1}$$

在求和中有 $0\leqslant r\leqslant k$。当 $r>0$ 时，因为

$$n-(n+1-l)r-(l-1)k-1=-n(r-1)-(l-1)(k-r)-1<0$$

故只可取 $r=0$，从而

$$f(\Omega(n,m;l,n+1))=m\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor}(m-1)^{k-1}\binom{n-(l-1)k-1}{k-1}=$$
$$m\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor}(m-1)^{k}\binom{n-l-(l-1)k}{k} \tag{5}$$

这便是文献[4]中定理 4 所给出的 $f(\overline{\Omega}(n,m,l))$。

在式(5)中，取 $l=1$ 得

$$f(\Omega(n,m;1,n+1))=m\sum_{k=0}^{n-1}(m-1)\binom{n-1}{k}=m[(m-1)+1]^{n-1}=$$
$$m^n=f(\Omega(n,m))$$

由定理 1，可直接得到 $f(G(n,m;\underline{l}_1,l_2))$ 与 $f(G(n,m;l_2,\overline{l}_2))$ 的计算公式如下。

定理 3

$$f(G(n,m;\underline{l}_1,l_2))=f(\Omega(n,m;l_1,l_2))-f(\Omega(n,m;l_1+1,l_2)) \tag{6}$$

$$f(G(n,m;l_1,\overline{l}_2))=f(\Omega(n,m;l_1,l_2+1))-f(\Omega(n,m;l_1,l_2)) \tag{7}$$

特别地

$$f(\overline{G}(n,m,l)) = f(G(n,m;\underline{l},n+1)) \tag{8}$$

$$f(G(n,m,l)) = f(G(n,m;1,\overline{l})) \tag{9}$$

式(8)和式(9)分别说明文献[4]中的定理 2 与文献[1]中的定理 6 仅是本定理的特殊情形。

定理 4

$$\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{n-r}{k-1} = 0 \qquad n\geqslant k \tag{10}$$

证明　显然 $\Omega(n,m;l,l+1)$为 $\Omega(n,m)$中每个游程长均为 l 的数列之集, 故

$$f(\Omega(n,m;l,l+1)) = \begin{cases} O & l \nmid n \\ m(m-1)^{\frac{n}{l}-1} & l \mid n \end{cases} \tag{11}$$

另一方面, 由定理 1 得

$$f(\Omega(n,m;l,l+1)) = m\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{l}\right]}(m-1)^{k-1}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{n-(l-1)k-1-r}{k-1} \tag{12}$$

若 $l\nmid n$, 由式(11)、(12)可得

$$\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{n-(l-1)k-1-r}{k-1} = 0 \tag{13}$$

若 $l\mid n$, 式(12)可写为

$$f(\Omega(n,m;l,l+1)) = m(m-1)^{\frac{n}{l}-1} + m\sum_{k=1}^{\frac{n}{l}-1}(m-1)^{k-1}\times$$
$$\sum_{r\geqslant 0}(-1)^k\binom{k}{r}\binom{n-(l-1)k-1-r}{k-1} \tag{14}$$

由式(11)和式(14)仍可得到式(13)成立。

在式(13)中取 $l=1$, 并记 $n-1$ 为 n, 便得到式(10), 得证。

2　算　例

下面, 我们给出本文主要结论的两个具体算例。

1) 求 $f(\Omega(6,9;2,4))$

由定理 1 得

$$f(\Omega(6,9;2,4)) = 9\sum_{k=1}^{3}(9-1)^{k-1}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{6-(4-2)r-(2-1)k-1}{k-1} =$$
$$9\sum_{k=1}^{3}8^{k-1}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\binom{5-2r-k}{k-1} =$$
$$9\left[\sum_{r=0}^{1}(-1)^r\binom{1}{r}\binom{4-2r}{0} + 8\sum_{r=0}^{1}(-1)^r\binom{2}{r}\binom{3-2r}{1} + \right.$$
$$\left. 8^2\sum_{r=0}^{0}(-1)^r\binom{3}{r}\binom{2-2r}{2}\right] = 9[0+8+8^2] = 648$$

2) 求 $f(G(6,9;2,\overline{3}))$

由定理3中的式(7)得

$$f(G(6,9;2,\bar{3}))=f(\Omega(6,9;2,4))-f(\Omega(6,9;2,3))$$

再由定理1

$$f(\Omega(6,9;2,3))=9\sum_{k=1}^{3}(8-1)^{k-1}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^{r}\binom{k}{r}\binom{5-r-k}{k-1}=576$$

又

$$f(\Omega(6,9;2,4))=648$$

所以

$$f(G(6,9;2,\bar{3}))=648-576=72$$

参 考 文 献

1 罗乔林. 一个组合数学问题及其在钥匙编码问题的应用. 应用数学学报, 1984, 7(1):119~123

2 柳柏濂. 关于钥匙编码的组合计数. 应用数学学报, 1986, 9(1):50~59

3 曹汝成. 钥匙编码的若干计数问题. 应用数学, 1994, 7(1):1~5

4 蒲和平. 一类组合计数问题. 电子科技大学学报, 1997, 26(3):303~307

Unified Formulas for Two Kinds of Linear Permutation Counting Problems

Pu Heping　　Huang Tinzhu

(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　Some relationships between two kinds of linear permutation counting problems exist in the set of m level digital sequences of length n whose maximal run length and minimal run length satisfy some constrains respectively. In this paper, some unified formulas are given which solve the above problems. A combinatorial identical relation is also obtained.

Key words　linear permutation;　minimal run length;　maximal run length;　counting problem

编辑　徐培红

◦科研成果介绍◦

NTRTES: WINDOWS NT 实时操作特性实验系统

主研人员　罗　蕾　熊光泽　刘锦德　王志平

该项目选择NT的实时性作为研究的重点, 为探索NT的实时性, 设计和实现了一实时特性实验系统。该系统对NT的实时性进行了测试, 尝试用定量方法研究操作系统, 弥补了前人研究, 分析了NT中之不足, 为全面分析操作系统打下良好基础, 对重点工程的系统软件造型和方案论证具有一定指导作用。

◦科　卞◦