第27卷 第4期 电子科技大学学报 Vol.27 No.4
1998年8月 Journal of UEST of China Aug.1998

最优极化分析理论基础*

徐 朴** 林昌禄
（电子科技大学微波工程系 成都 610054）

【摘要】 介绍了极化比和散射矩阵的基本概念以及它们之间的关系，分析了不同极化基下散射矩阵之间的变换，从而对最优极化分析的理论依据进行了概括。在此基础上给出了最优极化分析驻点法，同时进行了补充并修正了文献中的错误。

关 键 词 极化比； 散射矩阵； 最优极化； 驻点
中图分类号 O441.4

1 极化比和散射矩阵[1]

假设$(\hat{h}_1,\hat{v}_1)$，$(\hat{h}_2,\hat{v}_2)$是入射极化基和散射极化基，那么入射场$\bar{E}^i$表示为：$\bar{E}^i=E^i_{h_1}\hat{h}_1+E^i_{v_1}\hat{v}_1$，散射场为：$\bar{E}^s=E^s_{h_2}\hat{h}_2+E^s_{v_2}\hat{v}_2$。则雷达目标的作用表现为将入射极化状态线形变换到散射极化状态，可以表示为$\bar{E}^s=[S]\bar{E}^i$，写成分量形式为

$$\begin{bmatrix} E^s_{h_2} \\ E^s_{v_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{h_2h_1} & s_{h_2v_1} \\ s_{v_2h_1} & s_{v_2v_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E^i_{h_1} \\ E^i_{v_1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $[S]$为散射矩阵。在单站情况下，散射场和入射场取同一极化基$(\hat{h},\hat{v})$，则

$$\begin{bmatrix} E^s_h \\ E^s_v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{hh} & s_{hv} \\ s_{vh} & s_{vv} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E^i_h \\ E^i_v \end{bmatrix} \tag{2}$$

并且$s_{hv}=s_{vh}$，本文只考虑单站情况。定义极化比为

$$\rho=\frac{E_v}{E_h}=\frac{|E_v|}{|E_h|}\exp[\mathrm{j}(\alpha_v-\alpha_h)] \tag{3}$$

极化比是一种便于进行数学运算的极化描述方法，在本文中最优极化分析就是利用极化比来反映极化状态的。散射极化比ρ_s、入射极化比ρ_i及散射矩阵的各元素之间的关系为

$$\rho_s=\frac{s_{vv}\rho_i+s_{vh}}{s_{hv}\rho_i+s_{hh}} \tag{4}$$

2 不同极化基下定义的散射矩阵的变换[2]

一般以水平和垂直线极化基$(\hat{h},\hat{v})$表示平面电磁波极化电场矢量，即$\bar{E}=E_h\hat{h}+E_v\hat{v}$。设极化矢量$\bar{h}$在任意极化基$(\hat{h}_A,\hat{h}_B)$下的分量为$(h_A,h_B)$，即

$$\bar{h}=h_A\hat{h}_A+h_B\hat{h}_B \tag{5}$$

其中 $\hat{h}_A=(\hat{h}_{Ah},\hat{h}_{Av})$和$\hat{h}_B=(\hat{h}_{Bh},\hat{h}_{Bv})$满足$\hat{h}_A\cdot\hat{h}_B^*=0$（正交性）和$\hat{h}_A\cdot\hat{h}_A^*=\hat{h}_B\cdot\hat{h}_B^*=1$（归一性）。

1998年1月6日收稿，1998年3月10日修改定稿
* 国家“九五”重点科研项目
** 女 26岁 博士

存在一个 2×2 单位变换矩阵[T]将线极化基($\hat{h},\hat{v}$)变成极化基($\hat{h}_A,\hat{h}_B$)

$$\hat{h}(AB) = [T]\hat{h}(hv) \tag{6}$$

其中　$[T]=\frac{1}{(1+\rho\rho^*)^{\frac{1}{2}}}\begin{bmatrix}\exp(j\Psi_1) & \rho\exp(j\Psi_1)\\ -\rho^*\exp(j\Psi_4) & \exp(j\Psi_4)\end{bmatrix}$。由式(5)和式(6)得到线极化基($\hat{h},\hat{v}$)表示的向量 $\bar{h}(hv)$与($\hat{h}_A,\hat{h}_B$)表示的向量 $\bar{h}(AB)$的变换关系为

$$\bar{h}(AB) = (T^T)^{-1}\bar{h}(hv),\bar{h}(hv) = T^T\bar{h}(AB) \tag{7}$$

定义[U]$=T^T$ 为极化基($\hat{h}_A,\hat{h}_B$)表示的向量到($\hat{h},\hat{v}$)表示的向量的变换矩阵。由式(7)有 $\bar{E}(hv)=[U]\bar{E}'(AB)$,再由电压方程 $V=\bar{E}^T[S]\bar{E}$ 得到($\hat{h}_A,\hat{h}_B$)下的散射矩阵

$$[S'] = [U]^T[S][U] = \begin{bmatrix}s'_{AA} & s'_{AB}\\ s'_{BA} & s'_{BB}\end{bmatrix} \qquad s'_{AB} = s'_{BA} \tag{8}$$

进而可以注意到任意两种极化基 $\hat{h}(AB)$和 $\hat{h}(A'B')$下的散射矩阵均满足式(8),即

$$[S(A'B')] = [U]^T[S(AB)][U] = [T][S(AB)][T]^T \tag{9}$$

其中　[T]是满足 $\hat{h}(A'B')=[T]\hat{h}(AB)$的基变换矩阵。

2　最优极化分析驻点法[3]

最优极化是指使接收功率达到最大或最小的极化。在实际应用中,如果要探测或识别某个目标,就可以调整入射波的极化特性,使得接收功率最大,接收信号最强;如果要避开某个目标的电磁干扰,就应该使接收功率达到最小,甚至为零。

[S]一般是非对角形的,即 $s_{hv}=s_{vh}\neq 0$,那么存在一个酉变换矩阵[T],将极化基($\hat{h},\hat{v}$)变换到另一正交极化基($\hat{H},\hat{V}$),并使新极化基下的散射矩阵为对角形,即

$$[S'_1] = [U]^T[S][U] = \begin{bmatrix}s'_{HH} & 0\\ 0 & s'_{VV}\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$s'_{HH} = (1+\rho_1\rho_1^*)^{-1}(s_{hh}+2\rho_1 s_{hv}+\rho_1^2 s_{vv})\exp(2j\Psi_1) \tag{11}$$

$$s'_{VV} = (1+\rho_1\rho_1^*)^{-1}(\rho_1^{*2}s_{hh}-2\rho_1 s_{hv}+s_{vv})\exp(2j\Psi_4) \tag{12}$$

其中　$\rho_{1,2}=(-B\pm\sqrt{B^2-4AC})/(2A)$,$A=s_{hh}^*s_{hv}+s_{hv}^*s_{vv}$,$B=|s_{hh}|^2-|s_{vv}|^2$,$C=-A^*$。令 λ_1 是 s'_{HH}、s'_{VV}中模较大的一个,模较小的为 λ_2,则$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|$。设 δ_2 是 ρ_2 的相位,则 $\Psi_1=(-\delta_2/2)-(\pi/4)$,$\Psi_4=(\delta_2/2)-(\pi/4)$。若 $s'_{HH}=\lambda_2$,$s'_{VV}=\lambda_1$,进一步将[S'_1]化为[S'],则

$$[S'] = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^T[S'_1]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{13}$$

设[S']对应的极化基为($\hat{H},\hat{V}'$)。如果 $s'_{HH}=\lambda_1$,$s'_{VV}=\lambda_2$,则[S']=[S'_1],此时[S']对应的极化基仍为($\hat{H},\hat{V}$)。为方便起见,下面,[S']对应的极化基一律用($\hat{H},\hat{V}$)表示。

后向散射信号的接收功率是与电压的幅值平方成正比的,如果将比例系数设为 1,那么令 $\hat{h}_{r,t}=\bar{E}_{r,t}/\|\bar{E}_{r,t}\|$,$\hat{h}_r$、$\hat{h}_t$ 就是传送和接收的有效矢量天线长度。当 $\hat{h}_r=\hat{h}_t=\hat{h}_0$,$\hat{h}'_r=\hat{h}'_t=\hat{h}'_0$ 时,得到共极化通道接收功率

$$P^c = |\hat{h}_0^T[S]\hat{h}_0|^2 = |\hat{h}'^T_0[S']\hat{h}'_0|^2 = (1+\rho'\rho'^*)^{-2}(|\lambda_1|^2+\lambda_1\lambda_2^*\rho'^{*2}+\lambda_1^*\lambda_2\rho'^2+|\lambda_2|^2\rho'^2\rho'^{*2})$$

类似地,当 $\hat{h}_r=\hat{h}_t^{\perp}=\hat{h}_0^{\perp}$,$\hat{h}'_r=\hat{h}'^{\perp}_t=\hat{h}'_{0\perp}$时,得到交叉极化通道接收功率

$$P^x = |\hat{h}'^T_{0\perp}[S']\hat{h}'_0|^2 = (1+\rho'\rho'^*)^{-2}(|\lambda_1|^2\rho'\rho'^*-\lambda_1\lambda_2^*\rho'^{*2}-\lambda_1^*\lambda_2\rho'^2+|\lambda_2|^2\rho'\rho'^*)$$

对接收功率 P^x 和 P^c 的各驻点进行分析，在新极化基 $(\hat{H},\hat{V})$ 下得到以下结论：若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则当入射极化比为 $\rho'=0$ 或 ∞ 时，交叉极化通道的接收功率将为零。当极化比 $\rho'=\pm j(\frac{\lambda_1\lambda_2^*}{\lambda_1^*\lambda_2})^{\frac{1}{4}}$ 时，交叉极化通道的接收功率为最大值 $(1/4)(|\lambda_1|+|\lambda_2|)^2$。在共极化通道 $\rho'=0$ 时，将接收到最大功率 $|\lambda_1|^2$，并且这个功率值大于交叉极化通道的最大接收功率。若在新基下的入射极化比为 $\rho'=\pm(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^{\frac{1}{2}}$，则共极化通道的接收功率为零。

以上结果是用新极化基 $(\hat{H},\hat{V})$ 下的极化比 ρ' 来描述极化状态的，与之相对应的极化基 $(\hat{h},\hat{v})$ 下的入射极化比 ρ 为

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{\rho_1+\rho'e^{j\delta_2}}{1-\rho_1^*\rho'e^{j\delta_2}} & \text{当 } s'_{HH}=\lambda_1, s'_{VV}=\lambda_2 \text{ 时}\\ \rho=\dfrac{\rho'\rho_1+e^{j\delta_2}}{\rho'-\rho_1^*e^{j\delta_2}} & \text{当 } s'_{HH}=\lambda_2, s'_{VV}=\lambda_1 \text{ 时}\end{cases} \tag{14}$$

参照极化基 $(\hat{h},\hat{v})$ 的 Stokes 矢量为

$$\begin{aligned} g_0 &= 1\\ g_1 &= \frac{1-\rho\rho^*}{1+\rho\rho^*}\\ g_2 &= \frac{2|\rho|}{1+\rho\rho^*}\cos(\arg\rho)\\ g_3 &= \frac{2|\rho|}{1+\rho\rho^*}\sin(\arg\rho)\end{aligned} \tag{15}$$

相应的椭圆倾角 τ 和椭圆率角 ε 可按照下面各式计算，文献[3]中的计算式是错误的。

$$\tau=\begin{cases}45^\circ & \left.\begin{matrix}g_2>0\\ \end{matrix}\right.\\ 135^\circ & \left.\begin{matrix}g_2<0\end{matrix}\right\} g_1=0\\ 0^\circ,180^\circ & g_1>0\\ 90^\circ & \left.g_1<0\right\} g_2=0\\ 0.5\tan^{-1}(g_2/g_1) & g_1>0, g_2>0\\ 90^\circ+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(g_2/g_1) & g_1<0, g_2>0\\ 90^\circ+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(g_2/g_1) & g_1<0, g_2<0\\ 180^\circ+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(g_2/g_1) & g_1>0, g_2<0\end{cases} \tag{16}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\sin^{-1}g_3 \tag{17}$$

若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，则当极化比是一个实数(包括 ∞)时，共极化通道的接收功率为最大值 $|\lambda|^2$，而交叉极化通道的接收功率为零。当极化比是 $\pm j$ 时，交叉极化通道接收功率为最大值 $|\lambda|^2$，共极化通道的接收功率为零。

下面对文献[3]中给出的散射矩阵进行了极化分析。已知一个散射矩阵为 $\begin{bmatrix}2j & 0.5\\ 0.5 & -j\end{bmatrix}$，根据

最优极化分析的驻点法得到以下结果。表 1 是最优极化状态的极化比、椭圆率角和倾角。共极化和交叉极化通道的最优接收功率分别为 $P^{x}_{xn1,2}=0.0$，$P^{c}_{xn1}=4.871$，$P^{c}_{xn2}=0.629$，$P^{c}_{cn1,2}=0.0$，$P^{x}_{cn1,2}=1.750$，$P^{x}_{xm1,2}=2.250$，$P^{c}_{xm1,2}=0.500$，$P^{c}_{xs1,2}=2.250$。

表 1　最优极化状态的极化比、倾角 τ 和椭圆率角 ε

最优极化状态	原极化基下的极化比	新极化基下的极化比	倾角 τ	椭圆率角 ε
交叉极化零点 ρ_{xn2}	-2.414 2 j	∞	90	-22.5
交叉极化零点 ρ_{xn1}	0.414 2 j	0	0	22.5
和共极化最大值点 ρ_{cm1}				
交叉极化最大值点 $\rho_{xm1,2}$	±1.000 0	±j	45.135	0
共极化零点 λ_{cn1}，ρ_{cn2}	1.322 9-0.5 j	1.668 4 j	55.352 4	-9.735 6
	-1.322 9-0.5 j	-1.668 4 j	124.647 6	-9.735 6

将以上结果与文献[3]的数据比较可以看出，由于本文对倾角 τ 和椭圆率角 ε 的计算公式进行了纠正，所以它们的计算结果与文献有所不同，但更符合倾角 τ 和椭圆率角 ε 的定义域要求。其他相应参数的结果是完全一致的，从而说明了本文结论的正确性。

参　考　文　献

1　莫特 H，林昌禄译．天线和雷达中的极化．成都：电子科技大学出版社，1989：81～83

2　任　勇，解本钊，刘永坦等．不同极化基下定义的目标散射矩阵的变换．系统工程与电子技术，1994，16(10)：19～24

3　Xi Anqing, Boerner W M. Determination of the characteristic polarization states of the radar target scattering matrix [$S(AB)$] for the coherent monostatic and reciprocal propagation space by using the complex polarization ration ρ transformation formulation. J Optical Society of America, 1992, 9(3): 437～455

Basic Theory of Optimal Polarization Analysis

Xu Pu　　Lin Changlu

(Dept. of Microwave Eng., UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　The concépts of polarization ratio and scattering matrix and their relation are introudced in this paper. The transformation of the scattering matrixes in different bases is analyzed. Based on those basic theories, the critical point method of optimal polarization is given and reinforced at length. The inaccuracy in the reference is revised.

Key words　polarization ratio;　scattering matrix;　optimal polarization;　critical point

编辑　黄　辛