关于线性系统约当规范形的讨论

罗 刚* 张 翼
(西南交通大学电气学院 成都 610031) (深圳南油物业公司 深圳 518054)
周立峰
(电子科技大学自动化系 成都 610054)

【摘要】 研究了对相对同一特征根却具有多个约当子块的约当规范形线性系统的传递函数形式和实现结构图,给出了根据其本身特点而设计的一种求约当规范形的方法及其计算机实现程序。

关 键 词 约当规范形; 传递函数; 线性系统; 广义特征向量
中图分类号 TP273

在线性系统中,经常需要将状态空间表达式通过等价变换化为对角规范形(如求系统的状态转移矩阵、系统可控性、可观性的判定等)。但在许多给定的系统中,由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有重特征值,通常情况下只能变换为准对角规范形——约当(Jordan)规范形。

线性系统的对角规范形和约当规范形,都与系统特征方程的解——特征值有着密不可分的关系。若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 为两两相异时,系统具有对角规范形;当特征值 λ_i 有重根时,则有以下三种情况[1~3](设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 阶矩阵,为表述方便,设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为重根):

1) 虽然 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 有重根,但 $\boldsymbol{A}$ 阵仍有 n 个独立的特征向量,即同一特征值的代数重数等于其几何重数,或者说每个约当小块都是一阶的。用这 n 个特征向量为列向量组成一个非奇异的变换阵 $\boldsymbol{P}$,仍可把系统化为对角规范形。

2) 当特征值 λ_i 的约当块 $\boldsymbol{J}_i$ 中只有一个约当子块,即每个约当块的阶数等于该特征值的重数时,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可化为以下的形式

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_m \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

3) 当特征值 λ_i 的约当块 $\boldsymbol{J}_i$ 中有多个约当子块,即每个约当块阶数不等于该特征值的重数时,$\boldsymbol{A}$ 可化为以下约当规范形

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{J}_1=\begin{bmatrix} J_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{il} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{J}_{ik}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

1997年10月14日收稿
* 男 27岁 博士生

对于 1)和 2)所述两种线性系统,其传递函数特性、系统结构图的实现及规范形的转化方法等,在许多文献中都有详细的论述[1~5]。但对于第三种线性系统,有关文献仅叙述了基于广义特征向量将系统转化为这种形式的方法[3,6],而未论及其传递函数特性及其结构图。本文主要以第三种线性系统作为研究对象。

1　约当规范形系统传递函数特性

为了讨论的方便,设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有一个 n 重实根,且为 SISO 线性定常系统。

设系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$$

通过等价变换的约当规范形为

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}U \\ Y = \bar{C}\bar{X} \end{cases}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}} = P^{-1}\boldsymbol{A}P = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{bmatrix}$ 为 n 阶方阵;$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$ 为 r_i 阶方阵;$n = \sum_{i=1}^{l} r_i$;

$\bar{\boldsymbol{B}} = P^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1r_1} \\ \vdots \\ b_{l1} \\ \vdots \\ b_{ln} \end{bmatrix}$,$\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}P = [c_{11}, \cdots, c_{1r_1}, \cdots, c_{l1}, \cdots, c_{ln}]$;$\boldsymbol{p}$ 为非奇异的变换矩阵。

将上述系统的约当规范形转换为传递函数形式,得

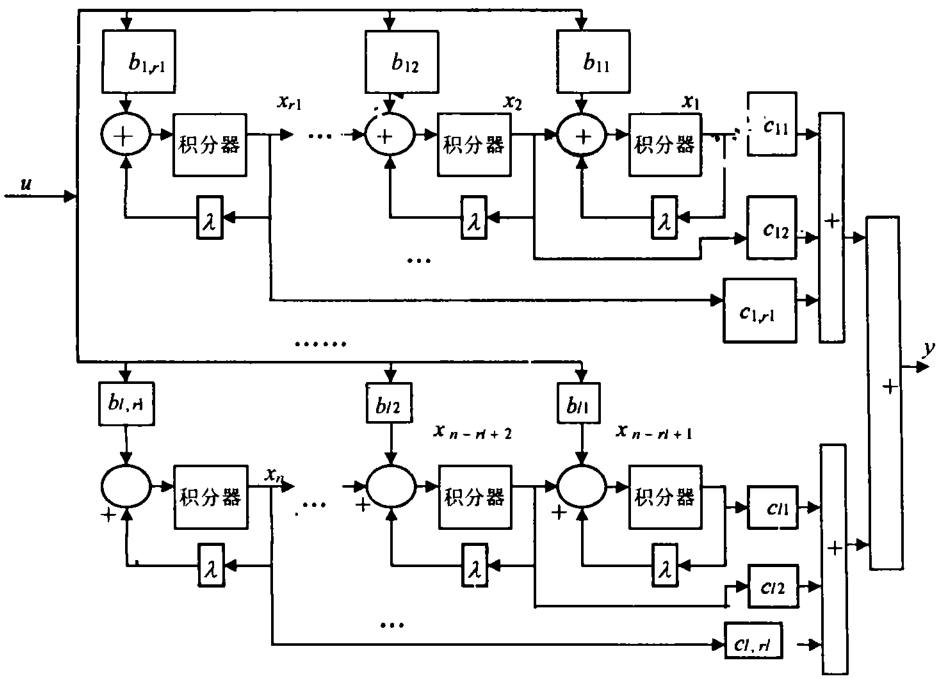
$$\bar{G}(s) = \bar{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{x(s-\lambda)^{n-1} + y(s-\lambda)^{n-2}}{(s-\lambda)^n} = \frac{a_1 s + a_2}{(s-\lambda)^2}$$

其中　$x = b_{11}c_{11} + b_{12}c_{12} + \cdots + b_{1r_1}c_{1l_1} \vdots + \cdots + \vdots b_{l1}c_{l1} + b_{l2}c_{l2} + \cdots + b_{ln}c_{ln}$;$y = b_{12}c_{11} + b_{13}c_{12} + \cdots + b_{1r_1}c_{1,r_1-1} \vdots + \cdots + \vdots b_{l2}c_{l1} + b_{l_3}c_{l2} + \cdots + b_{lr_1}c_{l,n-1}$;$a_1 = x$;$a_2 = y - x\lambda$,等价变换并不改变系统的传递函数,所以 $G(s) = \bar{G}(s)$。

由于上述系统是同一特征值 λ_i 的约当块中有多个约当子块的约当规范形的特例,进行推广可得出如下具有一般性的结论:具有第三种约当规范形的线性系统,其传递函数的分子分母存在着公因子,可进行零极点对消使系统化简。

3　约当规范形系统的结构图

参考系统传递函数的并联分解,根据约当规范形传递函数的特性,对上述第三种系统,可如图 1 进行构造,也可推广到更一般的系统。



4 将状态空间表达式化为约当规范形的方法

具有第三种约当规范形的线性系统,一般的转换方法是通过求系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义特征向量来构造变换矩阵 $\boldsymbol{P}$[3,6]。这种方法的缺点在于计算思路复杂、步骤烦琐,不便于计算机实现。根据以上对这类系统的研究,可设计一种转换方法,即:计算出系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值后,求出每个多重特征值约当子块的个数及阶数。然后组成约当规范形 $\bar{\boldsymbol{A}}$,再利用公式 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}$ 求解变换矩阵 $\boldsymbol{P}$。计算步骤为:

1) 利用 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$,求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

2) 对其中每个多重特征值(以代数重数为 σ_i 的 λ_i 为例):

(1) 求其几何重数 $\alpha_i=n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})$;

(2) 判断 σ_i 的值:若 $\alpha_i=\lambda_i$,则其约当规范形为对角形,转(5);若 $\alpha_i=1$,则其约当块中只有一个子块,转(5);否则,进行下一步;

(3) 判断各约当子块的阶数:计算 $v_j=n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})$,直到 $v_j=\sigma_i$ 为止,$j=0,1\cdots$;再计算各阶广义特征向量的个数:$m_{j+1}=v_{j+1}-v_j$,这样得到的各阶广义特征向量的个数是递减的;计算各约当子块的个数:将 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 逐次减1直至为0,并计算大于等于0的项的个数,即为第 h 个子块的阶数 r_h。具体计算见表1。

表1 约当子块的阶数

各式结果大于等于0的个数 r_h	r_1	r_2	$\cdots$	r_h	$\cdots$	r_{α_i}
m_1	m_1-1	m_1-2	$\cdots$	m_1-h	$\cdots$	$m_1-\alpha_i$
m_2	m_2-1	m_2-2	$\cdots$	m_2-h	$\cdots$	$m_2-\alpha_i$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m_k	m_k-1	m_k-2	$\cdots$	m_k-h	$\cdots$	$m_k-\alpha_i$

(4) 根据步骤(3)的结果,可以组成 λ_i 的约当块 $\boldsymbol{J}_i$,其表达式为 $\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} J_{i1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{ih} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{il} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{J}_{ih}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$为 $r_h\times r_h$ 阵。

(5) 判断具有重根的特征值是否按上述(1)~(4)的步骤处理完毕,是则进行下一步,否则将转至步骤(1)。

3)按步骤 2)得到的各约当块 J 及步骤 1)得到的各单重特征值构成约当规范形。$\bar{A}=$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_u & & & \\ & & & J_{u+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_q \end{bmatrix}$$为 $n\times n$ 阵。

4) 由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}$ 解出转换矩阵 $\boldsymbol{P}$,并求其逆 $\boldsymbol{P}^{-1}$。

5) $\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$, $\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{CP}$。

上述步骤可进行计算机编程实现。我们用 MATLAB 实现了将实矩阵化为约当规范形的计算。

参　考　文　献

1　尤昌德.现代控制理论基础.北京:电子工业出版社,1996

2　何关钰.线性控制系统理论.沈阳:辽宁人民出版社,1982

3　郑大钟.线性系统理论.北京:清华大学出版社,1990

4　[日]有本卓,高桥进一.线性系统理论例题练习.北京:国防工业出版社,1983

5　韩京清,何关钰,许可康.线性理论代数基础.沈阳:辽宁科技出版社,1985

6　尤昌德,阙志宏,杜继宏.现代控制理论基础例题与习题.成都:电子科技大学出版社,1991

Discussion of Jordan Canonical Linear System

Luo Gang

(Institute of Electric Eng.,Southwest Jiaotong University　Chengdu　610031)

Zhang Yi　　Zhou Lifeng

(Nanyou Property Development Co. Ltd.,　Shenzhen　518054)　(Dept.of Automation,UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　Based on the discussion of the transfer function and structure of Jordan canonical linear system which has more than one Jordan sub-block matrices for a eigenvalue, this paper devises a new method for transfering general state-space form to canonical form, which can be conviently realised by computer.

Key words　Jordan canonical form;　transfer function;　linear system;　generalized eigenvector

编辑　黄　辛