

# 不确定的时滞线性系统的稳定性分析\*

王宏霞\*

(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

**【摘要】** 研究了一类不确定的时滞线性大系统的稳定性问题。基于代数黎卡堤方程的处理方法及李雅普洛夫稳定性准则,对于给定的参数变化域,给出了具有结构不确定的时滞线性系统渐近稳定的充分判据。利用不等式的分析技巧,给出了完全用子系统描述的、确保大系统指数稳定的不确定参数的稳定界。

**关键词** 不确定性; 时滞; 黎卡堤方程; 李雅普洛夫泛函  
中图分类号 O231

近年来,不确定系统的稳定性研究受到人们的重视,取得了许多研究成果<sup>[1~3]</sup>。文献[1]基于一种非线性幂变换的方法,得到了不带时滞的线性系统的稳定界;文献[2]基于代数 Riccati 方程的处理方法也只对不带时滞的系统进行了稳定性分析。时滞是普遍存在的,它往往是影响系统稳定性的重要因素。而关于带时滞的不确定系统的研究成果还较少,本文给出了不确定的时滞线性系统渐近稳定,指数稳定的充分判据,推广了文献[1]的结果。

## 1 系统的描述及预备知识

研究如下系统

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(k)X(t) + B(k)X(t - \tau) & t \geq t_0 \\ X(t) = \Phi(t) & t_0 - c \leq t \leq t_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$A(k) = A_0 + \Delta A = A_0 + \sum_{l=1}^m k_l A_l$$

$$B(k) = B_0 + \Delta B = B_0 + \sum_{l=1}^m k_l B_l$$

式中  $A_0 \in R^{n \times n}$  为稳定矩阵;  $B_0 \in R^{n \times n}$  为常数矩阵;  $\Delta A$  和  $\Delta B$  表示结构不确定性;  $k_l$  是不确定参数,且  $k_l$  不全相等;  $A_l$  和  $B_l$  均为约定的  $n \times n$  实矩阵;  $m$  为不确定参数个数。  $x \in R^n$ , 时滞  $\tau \geq 0$ ,  $\Phi(t)$  为连续的初值向量函数。

假定  $k = [k_1, k_2, \dots, k_m] \in \Omega$ , 其中  $\Omega = \{k \in R^m : -\underline{k}_l < k_l < \bar{k}_l, l = 1, 2, \dots, m\}$ ,  $\underline{k}_l, \bar{k}_l$  均为正常数,显然  $0 \in \Omega$ ,  $\Omega$  为一连通区域。

因为  $A_0$  是稳定矩阵,对给定的正定矩阵  $Q$ , Lyapunov 方程为

$$A_0^T P + P A_0 = -Q \quad (2)$$

有正定矩阵解  $P$ 。

系统(1)是由  $n$  个子系统关联而成的,即

\* 1998年3月16日收稿

\* 女 24岁 硕士

$$\begin{cases} X_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)X_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(k)X_j(t - \tau) & t \geq t_0 \\ X_i(t) = \varphi_i(t) & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A(k) &= [a_{ij}(k)]_{n \times n} & B(k) &= [b_{ij}(k)]_{n \times n} \\ a_{ij}(k) &= a_{ij}^0 + \sum_{l=1}^m k_l a_{ij}^l & b_{ij}(k) &= b_{ij}^0 + \sum_{l=1}^m k_l b_{ij}^l \\ A_0 &= (a_{ij}^0)_{n \times n} & B_0 &= (b_{ij}^0)_{n \times n} \\ A_l &= (a_{ij}^l)_{n \times n} & B_l &= (b_{ij}^l)_{n \times n} \\ X(t) &= [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]^T & \Phi(t) &= [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]^T \end{aligned}$$

记

$$\|\Phi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi_i(t_0 + \theta)| \right\}$$

## 2 主要结果

这里取

$$\begin{aligned} k &= \max_{1 \leq l \leq m} \{ \underline{k}_l, \bar{k}_l \} & A &= k \sum_{l=1}^m A_l A_l^T \\ B &= k \sum_{l=1}^m B_l B_l^T & C &= k^2 \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m B_l B_p^T \end{aligned}$$

定理 1 若下列 Riccati 方程

$$A_0^T P + P A_0 + P[A + B + (mk + 1)B_0 B_0^T + C]P + (mk + 1)I = 0 \quad (4)$$

存在正定矩阵解  $P$ , 则系统 (1) 是渐近稳定的。式 (4) 中的  $I$  是单位矩阵。

证明 取 Lyapunov 泛函

$$V(t) = X^T(t) P X(t) + \int_{t-\tau}^t X^T(s) X(s) ds$$

$V$  函数沿着系统 (1) 求导, 有

$$S \quad V(t) = [X^T(t) X^T(t - \tau)] \begin{bmatrix} A^T(k)P + PA(k) + I & PB(k) \\ \text{知} B^T(k)P & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ X(t - \tau) \end{bmatrix}$$

$V(t)$  负定, 只需矩阵<sup>[7]</sup>

$$D = A^T(k)P + PA(k) + PB(k)B^T(k)P + I < 0$$

为此, 计算而得

$$\begin{aligned} X^T(t)DX(t) &= X^T(t)[A_0^T P + P A_0 + 2P\Delta A + \\ &P(B_0 B_0^T + 2\Delta B B_0^T + \Delta B \Delta B^T)P + I]X(t) \end{aligned} \quad (5)$$

因对任意恰当矩阵  $E$  和  $F$  及任意常数  $C > 0$ , 有<sup>[3]</sup>

$$E^T F + F^T E \leq \frac{1}{C} E^T E + C F^T F$$

所以有

$$2X^T(t)P\Delta AX(t) \leq X^T(t)PAPX(t) + mkX^T(t)X(t) \quad (6)$$

$$2X^T(t)P\Delta BB_0^T PX(t) \leq X^T(t)PBPX(t) + mkX^T(t)PB_0 B_0^T PX(t) \quad (7)$$

$$X^T(t)P\Delta B \Delta B^T PX(t) \leq X^T(t)PCPX(t) \quad (8)$$

将式(6)~(8)代入式(5),并应用 Riccati 方程(4),有  $X^T(t)DX(t) \leq 0$ 。由于  $k_l$  不全相等,所以当且仅当  $X(t)=0$  时等号成立。故  $D < 0$ ,从而  $V(t)$  负定,这就证明了系统(1)是渐近稳定的。

**定理 2** 对于式(2)中的正定矩阵  $P, Q$ , 若

$$\lambda_{\min}(Q) > 2 \|P\| \|B_0\| + 2k \|P\| \sum_{l=1}^m (\|B_l\| + \|A_l\|) \tag{9}$$

则系统(1)是渐近稳定的。

**证明** 设

$$g = \|P\| \|B_0\| + k \|P\| \sum_{i=1}^m \|B_i\| \tag{10}$$

取 Lyapunov 泛函为

$$V(t) = X^T(t)PX(t) + g \int_{t-\tau}^t \|X(s)\|^2 ds$$

$V(t)$  沿着系统(1)的轨迹求导,有

$$\begin{aligned} V(t) = & X^T(t)(A_0^T P + PA_0)X(t) + 2 \sum_{l=1}^m k_l X^T(t)PA_l X(t) + 2X^T(t)PB_0X(t-\tau) + \\ & 2 \sum_{l=1}^m k_l X^T(t)PB_l X(t-\tau) + g(\|X(t)\|^2 - \|X(t-\tau)\|^2) \end{aligned}$$

利用 Lyapunov 方程(2),并注意到式(10),有

$$V(t) \leq - \left\{ \lambda_{\min}(Q) - 2[\|P\| \|B_0\| + k \|P\| \sum_{l=1}^m (\|B_l\| + \|A_l\|)] \right\} \|X(t)\|^2$$

根据式(9)即知,  $V(t)$  负定,故定理得证。

**定理 3** 若系统(3)满足如下条件

1)  $a_{ii}(k) < 0$

2)  $\sum_{j=1}^n [ |a_{ij}(k)| (1 - \hat{q}_j) + |b_{ij}(k)| ] < -a_{ii}(k) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

则系统(3)的零解是指数稳定的。

其中

$$\hat{q}_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

**证明** 由条件 2) 知,存在足够小的  $\epsilon > 0$ , 使

$$a_{ii}(k) + \epsilon + \sum_{j=1}^n [ |a_{ij}(k)| (1 - \hat{q}_j) + |b_{ij}(k)| ] \exp(\epsilon\tau) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{11}$$

对系统(3)利用常数变易法,有

$$\begin{aligned} X_i(t) = & X_i(t_0) \exp[ a_{ii}(k)(t - t_0) ] + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \exp[ a_{ii}(k)(t - s) ] [ a_{ij}(k)(1 - \hat{q}_j) X_j(s) + \\ & b_{ij}(k) X_j(s - \tau) ] ds \end{aligned}$$

两边取绝对值,有

$$\begin{aligned} |X_i(t)| \leq & \varphi \exp[ a_{ii}(k)(t - t_0) ] + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \exp[ a_{ii}(k)(t - s) ] [ |a_{ij}(k)| (1 - \hat{q}_j) |X_j(s)| + \\ & |b_{ij}(k)| |X_j(s - \tau)| ] ds \end{aligned}$$

令

$$P_i(t) = \begin{cases} \|\varphi\| \exp[a_{ii}(k)(t-t_0)] + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t \exp[a_{ii}(k)(t-s)] [ |a_{ij}(k)| (1-\hat{q}_j) |X_j(s)| + |b_{ij}(k)| |X_j(s-\tau)| ] ds & t \geq t_0 \\ \|\varphi\| & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

显然, 对于一切  $t \geq t_0 - \tau$ , 均有

$$|X_i(t)| \leq P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

当  $t \geq t_0$  时, 对  $P_i(t)$  两端求导, 经过整理可得

$$P_i(t) \leq a_{ii}(k)P_i(t) + \sum_{j=1}^n [ |a_{ij}(k)| (1-\hat{q}_j) + |b_{ij}(k)| ] \sup_{t-\tau \leq s \leq t} P_j(s)$$

再令

$$S_i(t) = P_i(t) \exp[\epsilon(t + \tau - t_0)] \quad t \geq t_0 - \tau \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$S_i(t)$  两端对  $t$  求导, 经过计算可得

$$S_i(t) \leq [ a_{ii}(k) + \epsilon ] S_i(t) + \sum_{j=1}^n [ |a_{ij}(k)| (1-\hat{q}_j) + |b_{ij}(k)| ] \exp(\epsilon\tau) \sup_{t-\tau \leq s \leq t} S_j(s) \quad (12)$$

对任意  $d > 1$ , 有

$$S_i(t) < d \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

对一切  $t \geq t_0 - \tau$  成立. 由于当  $t \in [t_0 - \tau, t_0]$  时, 有式(13)成立, 因而利用反证法假设式(13)不成立, 必存在某个  $i$  及  $t > t_0$ , 使得

$$\begin{aligned} S_i(t_1) &= d \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\|, S_i(t) < d \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\| \quad t_0 \leq t < t_1 \\ S_j(t) &\leq d \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\| \quad t_0 \leq t < t_1 \quad (j \neq i, j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

易知,  $S_i(t_1) \geq 0$ ; 另一方面, 由式(11)、(12)可知

$$\begin{aligned} S_i(t_1) &\leq [ a_{ii}(k) + \epsilon ] d \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\| + \sum_{j=1}^n [ |a_{ij}(k)| (1-\hat{q}_j) + |b_{ij}(k)| ] \\ &\quad \exp(\epsilon\tau) d \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\| = \left\{ a_{ii}(k) + \epsilon + \sum_{j=1}^n [ |a_{ij}(k)| (1-\hat{q}_j) + |b_{ij}(k)| ] \exp(\epsilon\tau) \right\} d \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\| < 0 \end{aligned}$$

与  $S_i(t_1) \geq 0$  矛盾, 故式(13)成立, 当  $d \rightarrow 1$  时, 有

$$S_i(t) \leq \exp(\epsilon\tau) \|\varphi\| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

对一切  $t \geq t_0 - \tau$  成立, 于是有

$$|X_i(t)| \leq P_i(t) = S_i(t) \exp[-\epsilon(t + \tau - t_0)] \leq \|\varphi\| \exp[-\epsilon(t - t_0)] \quad t \geq t_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

故系统(3)的零解是指数稳定的。

### 3 实 例

例 1 考虑系统(1), 其中

$$\begin{aligned} A(k) &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B(k) &= \begin{bmatrix} -2.446 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$-0.0007 < k_1 < 0.0008 \quad -0.001 < k_1 < 0.001$$

这里,  $A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_0 = \begin{bmatrix} -2.446 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $m=2$  i

易求得

$$k = 0.001, A = \begin{bmatrix} 0.004 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 B_0^T = \begin{bmatrix} 5.983 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得 Riccati 方程(4)的正定矩阵解为

时, 
$$P = \begin{bmatrix} 0.2577 & -0.2786 \\ 0.4244 & 1.1324 \end{bmatrix}$$

由定理 1 知该系统是渐近稳定的。

例 2 考虑系统(1), 其中

S

$$A(k) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(k) = \begin{bmatrix} -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$-0.001 < k_1 < 0.01, -0.008 < k_2 < 0.009$

这里

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对于给定的正定矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

解得 Lyapunov 方程(2)的正定矩阵解为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

易求得

$$k = 0.01, \lambda_{\min}(Q) = 4, \|P\| = 3, \|B_0\| = 0.5, \|A_1\| = \|A_2\| = 1, \|B_1\| = \|B_2\| = 2$$

从而满足式(9), 由定理 2 知该系统渐近稳定。

例 3 考虑系统(1), 其中

$$A(k) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(k) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad a$$

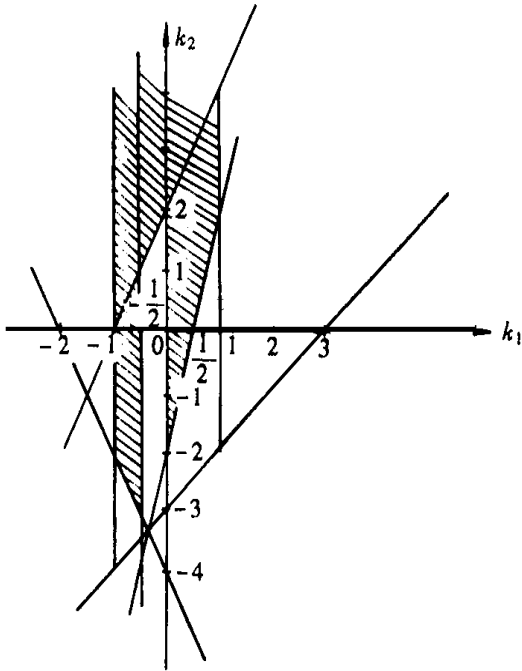


图 1 例 3 系统的稳定界

由定理3不难算得, 该系统的稳定界为

$$\begin{cases} k_1 - k_2 - 3 < 0 \\ |k_1| + |1 + 2k_1| < 3 - k_1 + k_2 \\ -1 < k_1 < 1 \end{cases}$$

本文是在导师钟守铭教授的悉心指导下完成的, 在此深表谢意!

### 参 考 文 献

- 1 曹永岩, 孙优贤. 具有结构不确定性的线性系统的鲁棒稳定性分析. 控制理论与应用, 1997, 14(1): 34~41
- 2 王向东. 一类不确定组合大系统的稳定性: Riccati 方程方法. 控制理论与应用, 1995, 12(5): 653~658
- 3 曹登庆. 不确定变时滞线性系统的镇定条件. 控制理论与应用, 1997, 14(1): 85~89
- 4 Shue Jing Chung, Chen Bor Sen, Fan Chu k. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. IEEE Trans Automat Contr 1991, 36(5): 638~640
- 5 钟守铭. 具有不确定的时滞微分系统的稳定性. 电子科技大学学报, 1996, 25(1): 98~102
- 6 张毅, 章毅, 王慕秋. 非线性时滞微分不等式及其应用. 科学通报, 1993, 38(16): 1455~1458
- 7 Kreindeler E, Jameson A. Conditions for nonnegative of partitioned matrices. IEEE Trans Automat Contr, 1972, 17: 147~148

## Analysis of Stability of Uncertain Linear Systems with Delay

Wang Hongxia

(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** This paper discusses the stability of a class of uncertain linear systems with delay. To certain domain of varying parameters, the algebraic Riccati equation approach and Lyapunov stability criterion are developed to obtain the results of the asymptotic stability. By making use of the method of inequality analysis, the stable bounds of uncertain parameters in each subsystem are given.

**Key words** uncertain linear systems; delay; Riccati equation; Lyapunov function

编辑 徐培红