波动方程二阶差分方法的研究及在矩形波导中的应用*

喻志远**　　林为干***
(电子科技大学应用物理所　成都　610054)

【摘要】 通过中心差分法可将电场满足的波动方程化为一组耦合二阶差分公式形式。在所研究的问题仅涉及横向(X 方向)时,此耦合电场二阶差分方程组简化为一非常简洁的形式，即一个单一电场(E_y)去耦合二阶差分方程。它具有计算简单，节省计算机内存的特点。文中研究了其稳定条件，空间网格的划分特性和吸收边界条件，并与相应的 FDTD 方法进行了对比。在研究矩形波导中电感不连续问题中，计算出的数据与已发表的数据吻合得很好。

关 键 词　二阶有限差分法；波导不连续；波动方程；数字解的稳定条件
中图分类号　TN015

在过去二十年中，已证明有限时域差分法（FDTD）是一种可行的分各种边界及结构下的电磁问题的方法。常规的 FDTD 方法是基于直接离散麦克斯韦方程中的两个旋度方程而得到的，虽然有许多其他解麦克斯韦方程的差分方法，例如基于矢量波方程的时域差分法（SFDE），但文献中报道很少，这表明人们对其研究很少。实际分析表明这类时域差分技术在导波不连续问题的分析中是非常有用的。SFDE 最初是用于处理常规 FDTD 方法中子网格技术中界面场的计算[1]，以及曲面和角度表面的处理[2]，逐渐又用于直接分析共面带线和天线中及粗网格下高精度差分分析和本征值 S 参数计算[3~5]。

本文给出了 SFDE 方法的数字稳性条件以及实际操作中的一些原则问题。针对波导中 X 方向不连续问题给出了一个简洁的电场波动方程的差分公式，并从数学上和数字计算上证明了这一新的差分公式在处理波导中 X 方向不连续问题时的等效性。

1　二阶差分波方程方法

电场波动方程为

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\nabla^2 E-\nabla(\nabla E) \tag{1}$$

将三个电场分量分离即可以得到一耦合方程组，为简明起见只给出 E_y 分量所满足的方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\right] \tag{2}$$

一般很容易地可类推出 E_x, E_z 所满足的方程，它们共同组成一耦合方程组。下面证明其数字稳定性判据。

由式(1)可以写成

$$\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-\nabla\times\nabla\times E \tag{3}$$

引入本征值问题有

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\lambda^2 E \tag{4}$$

$$\nabla\times\nabla\times E=-\frac{\lambda^2}{c^2}E \tag{5}$$

1998年6月22日收稿, 1998年8月31日修改定稿
* 国家自然科学基金资助项目，基金号：69771027

** 男　52岁　博士　教授
***男　哲学博士 中科院院士　教授　博士导师

由中心差分法,式(4)可以写成

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{E^{n+1}-2E^n+E^{n-1}}{\Delta t^2}=\lambda^2 E \tag{6}$$

令$q=\dfrac{E^n}{E^{n-1}}$,如 $q\leq 1$，则计算是稳定的。从式(6)有

$$q^2-(2+\Delta t^2\lambda^2)q+1=0 \tag{7}$$

解此关于 q 的一元二次方程

$$q=\frac{2+\Delta t^2\lambda^2\pm\sqrt{\Delta t^4\lambda^4+4\Delta t^2\lambda^2}}{2} \tag{8}$$

由式(8)可以证明

$$\mathrm{Re}(\lambda)=0 \qquad \mathrm{Im}(\lambda)\leq\frac{2}{\Delta t} \tag{8a}$$

此时，$q=1$ 满足计算稳定条件。

设电场 E 由谐函数组成，则其空间导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\sin(k_x\Delta x/2)}{\Delta x}=m$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\sin(k_y\Delta y/2)}{\Delta y}=n$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\sin(k_z\Delta z/2)}{\Delta z}=p$$

展开式(5)，可得齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix} s-4n^2-4p^2 & 4mn & 4mp \\ 4mn & s-4m^2-4p^2 & 4np \\ 4mp & 4np & s-4m^2-4n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{bmatrix}=0 \tag{9}$$

式中　$s=\dfrac{\lambda^2}{c^2}$。式(9)有解的充要条件是其行列式的值为零，因而解得

$$s=\frac{\lambda^2}{c^2}=4(m^2+n^2+p^2) \tag{10}$$

式(10)中，当正弦函数取 1 时有最大值，　即

$$\frac{\lambda^2}{c^2}=4\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right) \tag{11}$$

再由式(8a)，可得

$$c\Delta t\leq\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right)^{-1/2} \tag{12}$$

这与 FDTD 方法的稳定性条件相同，SFD 方法的吸收边界条件与常规 FDTD 方法同样涉及到边界上的切向电场的计算，故其推导方法和结果都与 FDTD 方法相同。但其网格的划分无 1/2 的概念，即所有的电场都位于网格的各交点上。

在矩形波导中，当分析的不连续问题仅涉及到 X 方向时，激励起的雕落模为 Hno 模。此时有 E_x=E_z=0，则耦合波动方程简化为一个去耦合方程，其中仅含一个电场分量 E_y

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right] \tag{13}$$

使用中心差分近似，式(13)可以表示成

$$
\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i,j,k) = {} & [2-2(c)^2-2(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})^2]E_y^n(i,j,k)-E_y^{n-1}(i,j,k)+(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x})^2[E_y^n(i-1,j,k)+ \\
& E_y^n(i+1,j,k)]+(c\mathrm{d}t/\mathrm{d}z)^2[E_y^n(i,j,k-1)+E_y^n(i,j,k+1)]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

式中　$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu(i,j,k)\varepsilon(i,j,k)}}$ 为波的速度。

式（14）在有源区和无散区域均成立，同时亦满足波导中均匀区和不连续区域，只要其不连续仅涉及 X 方向，这种方法称为单一电场变量的二阶有限差分法（SFDEC）。很明显，这种方法可显著地节省计算机内存的要求。由于需要记录 n 和 n-1 时刻的电场值，与常规的 FDTD 方法相比可节省 1/6 的内存空间，实际计算表明新的方法所用的 CPU 时间仅为常规 FDTD 方法的 0.38。

3　新算法的证实

例 1　用一段空波导（WG28，$a\times b$=7.112 mm×3.556 mm）做新方法的试验计算。Liao-3 阶吸收边界条件加在所选择空波导的两端，用新算法计算其反射系数。波导的离散为 12×24×50，dz=0.5 mm，时间迭代次数为 4 000 次。图 1 给出了波导中主模式 H_{10} 模电场幅度随时间的变化。从中可以看出随着时间的流逝，此幅度展现出渐渐消逝而收敛于零。图 2 给出了在所加的边界条件下新方法计算出的反射系数。与常规的 FDTD 算法相比，在同样的条件下 Liao-3 阶吸收边界条件对新算法显示出更好的吸收特性。

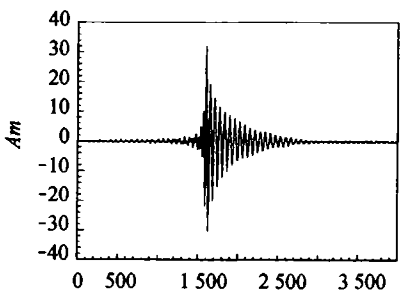

图 1　空波导中,在新算法下主模幅度的时间记录

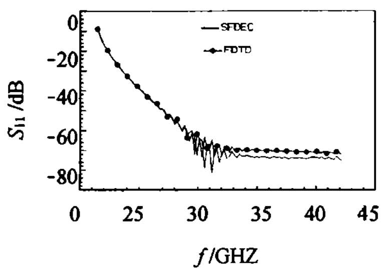

图 2　空波导在新算法下的反射系数与 FDTD 的比较

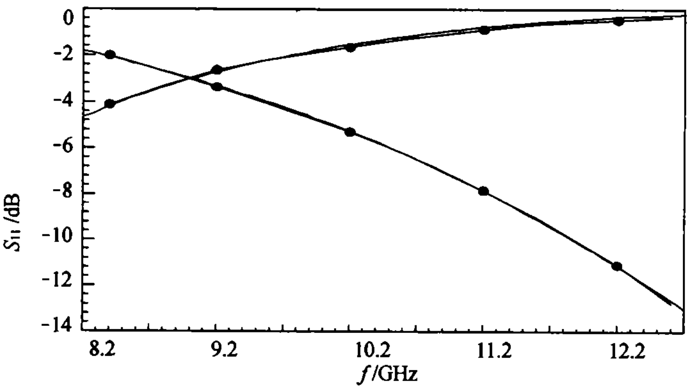

图 3　波导中非对称膜的 S 参数计算

—— S_{21}，S_{11} 由本文 SFDEC 方法给出；● 由文献[6]给出

例2　一段带有非对称电感膜片的 WG90 波导的 S 参数的计算。波导的离散为 10×60×39，dz=0.476 25 mm (a ×b = 22.86 mm ×10.16 mm)，时间迭代次数为 5 000 次。图 3 给出了用 SFDEC 方法和文献[6]中给出的数据的对比。可以看出两者吻合得非常好，这表明本文提出的 SFDEC 新方法是有效和可行的，其中所用的计算机内存是常规 FDTD 的一半，而 CPU 时间仅为常规 FDTD 的 0.38。在上面给出的

两个例子中 S 参量的抽取是采用文献[7]所给出的方法。

4 结 论

本文讨论了波动方程的二阶差分公式的稳定条件及相关问题，并提出了一种新的 SFDEC 算法，可以用来分析矩形波导中 X 方向的不连续问题。与传统的 FDTD 方法相比，新方法可以大大减小对计算机内存和 CPU 时间的需求，进一步地研究可以扩展新方法在一般矩形波导不连续问题中的应用。

参 考 文 献

1 Zivanovic Svetlata S, Yee Kane S, Mei Kenneth K. A subgridding method for the time-domain finite-difference to solve Maxwell's Equations. IEEE Trans on MTT, 1991, 39(3):471~479

2 Craddock Ian J, Railton Chris J. Analysis of curved and angled surfaces on a cartesian mesh using a novel finite-difference time-domain algorithm. IEEE Trans on MTT, 1995, 43 (10):2 460~2 465

3 Aoyagi Paul H , Lee Jin-Fa, Mittra Raj. A hybrid Yee algorithm/Scalar-wave equation approach. IEEE Trans. on MTT, 1993 ,41 (9):1 593~1 600

4 Cole James B. A high accuracy FDTD algorithm to solve microwave propagation and scattering problems on a coarse grid. IEEE Trans. on MTT,1995, 43(9) :2 053~2 058

5 icient eigenvalue analysis and s-matrix computation of waveguide structure IEEE Trans on MTT.1993，41(12):2 109~2 115

6 Jung Kyung-Yuung , Kin Hyeongdong, Ko Kwang Cheol. An improved unimodal absorbing boundary condition for waveguide problems. IEEE Microwave and Guided Wave Letters , 1997, 7(11):368~370

7 Yu Zhiyuan. A simple and effective method for the reflection coefficient extraction in rectangular waveguide discontinuity analysis by the FDTD Microwave and Optical Technology Letters,1997,15(1):.57~59

Analysis of Wave Equation of Second Order Difference and Its Applications in Rectangular Waveguides

Yu Zhiyuan Lin Weigan

(Institute of Applied Physics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract The wave equation of electric in the waveguide can be translated into a coupled difference equation of second order by centered differency approximation. This coupled difference equation can be reduced to a very compact decoupled difference equation which contains only one electric component, the Ey, when the discontinuity under investigating only relates to the x-direction in the rectangular waveguide . This difference equation can be computed simply and the memory of computer as well as the CPU time are saved greatly comparing with the conventional FDTD algorithm. The condition of its stability, the dividing of the spatial grid and the absorbing condition of the algorithm are given and compared with the conventional FDTD method. Both data examples computed by the new algorithm and published ones are presented,which show a good agreement.

Key words second order difference method of wave equation; discontinuities of waveguides; wave equations; the stability condition of numerical solution