非线性需求函数条件下二度价格歧视研究*

唐小我**
（电子科技大学管理学院 成都 610054）

【摘要】 研究非线性需求函数条件下二度价格歧视问题,给出了三段定价和四段定价条件下垄断厂商收益最大化条件,为进一步研究任意分段条件下垄断厂商收益最大化条件提供了较好的基础。

关 键 词 非线性需求函数; 二度价格歧视; 收益最大化; 垄断厂商
中图分类号 F016; F224.0

1 三段定价条件下垄断厂商收益最大化条件

文献[1]研究了线性需求函数条件下垄断厂商收益最大化条件。本文进一步研究非线性需求函数条件下垄断厂商收益的最大化条件。垄断厂商常通过二度价格歧视来增加收益,最简单的作法就是采用三段定价。设需求函数为

$$P=f(Q)$$

式中 Q 为销售量; P 为销售价格。因需求曲线为向右下方倾斜的曲线,故假定 $f(Q)$是严格单调递减,即 $f'(Q)<0$，还假定 $f''(Q)>0$，后一假定表明需求曲线是凸向原点的。假设 Q_0 和 Q_2 是既定的,并且 $Q_0<Q_2$。所谓三段定价是指将区间$(Q_0, Q_2]$分为两个区间$(Q_0, Q_1]$和$(Q_1, Q_2]$，其中，Q_1 满足 $Q_0<Q_1<Q_2$，且当 $Q\in(Q_0,Q_1]$时，价格定为 $P=f(Q_1)$;当 $Q\in(Q_1,Q_2]$时,价格定为 $P=f(Q_2)$;当$Q\in(0,Q_0]$时，价格定为 $P=f(Q_0)$。三段定价方法的表示如图1所示。

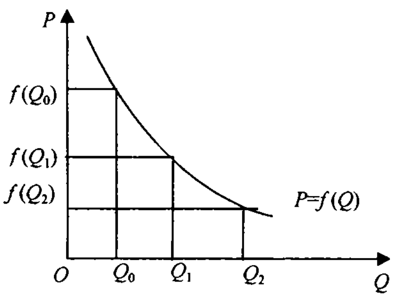

图1 三段定价法

设垄断厂商在区间$(0,Q_2]$上的总收益为 TR，则有

$$TR=(Q_1-Q_0)f(Q_1)+(Q_2-Q_1)f(Q_2)+Q_0f(Q_0) \tag{1}$$

式中 TR 是 Q_1 的函数，我们需要解决的问题是如何确定 Q_1 使 TR 达到最大。使 TR 达到最大的 Q_1 必然满足下述条件

$$\frac{dTR}{dQ_1}=(Q_1-Q_0)f'(Q_1)+f(Q_1)-f(Q_2)=0 \tag{2}$$

记 $g(Q_1)=\frac{dTR}{dQ_1}$，即

$$g(Q_1)=(Q_1-Q_0)f'(Q_1)+f(Q_1)-f(Q_2) \tag{3}$$

如果 $Q_1<Q_0$，则必有 $Q_1<Q_2$。因$f(Q)$是严格单调递减函数，从而有$f(Q_1)>f(Q_2)$和 $f'(Q_1)<0$。于是必有 $g(Q_1)>0$，即 $Q_1<Q_0$不可能是式（2）的解。

如果 $Q_1>Q_2$，则必有 $Q_1>Q_0$，从而有$(Q_1-Q_0)f'(Q_1)<0$，$f(Q_1)-f'(Q_2)<0$。于是有 $g(Q_1)<0$，即 $Q_1>Q_2$ 不可能是式（2）的解。

如果 $Q_1=Q_0$，则 $g(Q_0)=(Q_0-Q_0)f'(Q_0)+f(Q_0)-f(Q_2)=f(Q_0)-f(Q_2)>0$。这表明$Q_1=Q_0$不可能是式（2）的解。

如果$Q_1=Q_2$，则 $g(Q_2)=(Q_2-Q_0)f'(Q_2)+f(Q_2)=(Q_2-Q_0)f'(Q_2)<0$。这表明$Q_1=Q_2$不可能是式（2）的解。

1998年8月3日收稿
* 国家杰出青年科学基金资助项目，基金号：79725002
** 男 43岁 博士 教授

因假定需求函数 $f(Q)$ 的一阶导数和二阶导数都存在，故 $f(Q)$ 和 $f'(Q)$ 都是连续的。从而 $g(Q_1)=(Q_1-Q_0)f'(Q_1)+f(Q_1)-f(Q_2)$ 是闭区间 $[Q_0,Q_2]$ 上的连续函数。因 $g(Q_0)g(Q_2)<0$，故必存在某一 $Q^*\in(Q_0,Q_2)$ 使 $g(Q^*)=0$。这表明式（2）必然有解，且其解 Q_1 必然满足 $Q_0<Q_1<Q_2$。

因 $Q_0<Q_1$，故 $Q_1-Q_0\neq 0$。由式（2）可得 $f(Q_1)=\dfrac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0}$，归纳起来有下述结论。

定理 1　使总收益 TR 达到最大的 Q_1 必然满足方程

$$f'(Q_1)=\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0} \tag{4}$$

Q_1 满足不等式

$$Q_0<Q_1<Q_2 \tag{5}$$

下面对式（4）的几何意义作一说明。过 Q_0 作平行于 P 轴的直线交需求曲线于 A 点，过 Q_2 作平行于 P 轴的直线交需求曲线于 B 点，过 B 作 AQ_0 的垂线，设垂足为 C。过 AB 弧上任一点都可以作一条切线。设 M 为 AB 弧上的某一点，过 M 点的切线交 AC 于 D 点，交 BC 于 E 点（见图 2）。如果 $MD=ME$，则 M 点的横坐标 Q_1 必然满足式（4）。即 M 点的横坐标 Q_1 为满足式（4）的解。

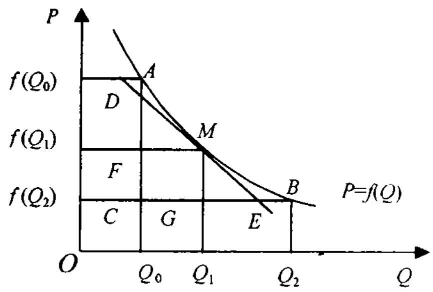

图 2　式(4)的几何意义

关于上述结论，下面给出一个简单的证明。过 M 点作平行于 BC 的直线，交 AC 于 F 点，因 $MD=ME$，故有

$$DF=FC$$
$$FC=FQ_0-CQ_0=MQ_1-BQ_2=f(Q_1)-f(Q_2)$$

根据切线斜率的定义可得

$$DF=FM[-f'(Q_1)]=(Q_1-Q_0)[-f'(Q_1)]$$

因 $DF=MC$，故 $(Q_1-Q_0)[-f'(Q_1)]=f(Q_1)-f(Q_2)$，即 $f'(Q_1)=\dfrac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0}$。

从上述作切线的方法可以看出，满足 $MD=ME$ 的 M 点是唯一的，从而式（4）的解也是唯一的。

下面从另一个角度解释 M 点所代表的最优性含义。设 MQ_1 交 BC 于 G，经简单计算可得 $TR=(Q_1-Q_0)f(Q_1)+(Q_2-Q_1)f(Q_2)+Q_0f(Q_0)=(Q_1-Q_0)[f(Q_1)-f(Q_2)]+(Q_2-Q_0)f(Q_2)+Q_0f(Q_0)$。记 $TR_1=(Q_1-Q_0)[f(Q_1)-f(Q_2)]$，则 $TR=TR_1+(Q_2-Q_0)f(Q_2)+Q_2f(Q_2)$。因 Q_0、Q_2、$f(Q_0)$、$f(Q_2)$ 既定，从而使 TR 最大化等价于使 TR_1 最大化。因 $Q_1-Q_0=CG, f(Q_1)-f(Q_2)=CF$，故 $TR_1=CG\cdot CF$。在坐标系 ACB 中，$TR_1=CG\cdot CF$ 正好代表销售量（需求量）为 CG 时的总收益。记边际收益为 MR，则 TR_1 最大化的条件为 $MR=0$。需求弹性 E_d 和边际收益 MR 的关系为 $MR=P(1+\dfrac{1}{E_d})$。当 $E_d=-1$ 时，$MR=0$。根据文献[2]需求弹性 E_d 的几何测定法，在坐标系 ACB 中，M 点的弹性 E_d 正好为−1，从而有 $MR=0$。这正是 TR_1 取最大值的条件，同时也是 TR 取最大值的条件。

例 1　设需求函数为 $P=f(Q)=A/Q$，A 为正常数。设 Q_0、Q_2 既定，且 $Q_0<Q_2$。垄断厂商欲在（Q_0，Q_2]上进一步实施价格歧视。假设垄断厂商采用三段定价方式，Q_1 为（Q_0，Q_2]的分段点，即 $(Q_0,Q_2]=(Q_0,Q_1]\cup(Q_1,Q_2]$。试确定 Q_1 使垄断厂商的收益 TR 达到最大。

解　根据定理 1 的式（4），所求 Q_1 应满足

$$f'(Q_1)=\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0}$$

即
$$-\frac{A}{Q_1^2}=\frac{(A/Q_2)-(A/Q_1)}{Q_1-Q_0} \tag{6}$$

将式（6）代简可得$Q_1^2=Q_0Q_2$。因$Q_1>Q_0>0$，故有
$$Q_1=\sqrt{Q_0Q_2} \tag{7}$$

式（7）表明 Q_1是 Q_0和 Q_2的几何平均。区间$[Q_0,Q_1]$的中点坐标为 $Q_1=\frac{1}{2}(Q_1+Q_0)$ 即Q_1'为Q_0和 Q_2的算术平均。因两个不同正数的几何平均小于其算术平均，故有$Q_1<Q_1'$。这表明Q_1位于$[Q_0,Q_2]$中点的左侧，即$Q_1-Q_0<Q_2-Q_1$。这表明第一区间$(Q_0,Q_1]$的长度小于第二区间$(Q_1,Q_2]$的长度。事实上，这一结论具有一般性。我们有如下结论。

定理 2　设$(Q_0,Q_2]=(Q_0,Q_1]\cup(Q_1,Q_2]$。如果 Q_1是使垄断厂商收益最大化的分段点，则区间$(Q_0,Q_1]$的第一区间$(Q_0,Q_2]$的长度Q_1-Q_0必然小于其第二区间$(Q_1,Q_2]$的长度Q_2-Q_1，即必有
$$Q_1-Q_0<Q_2-Q_1 \tag{8}$$

证明　根据定理 1，使垄断厂商收益最大化的 Q_1满足
$$f'(Q_1)=\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0} \tag{9}$$

因$Q_1<Q_2$，即$Q_1\neq Q_2$，故式（9）可改写为
$$f'(Q_1)=\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_2-Q_1}\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-Q_0} \tag{10}$$

因 $f(Q)$在$[Q_1,Q_2]$上连续，并在(Q_1,Q_2)上可导，根据拉格朗日定理，必存在某一Q^*满足$Q_1<Q^*<Q_2$。使得
$$f'(Q^*)=\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_2-Q_1} \tag{11}$$

将式（11）代入式（10）可得
$$f'(Q_1)=f'(Q^*)\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-Q_0}$$

即
$$\frac{f'(Q_1)}{f'(Q^*)}=\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-Q_0}$$

因$Q_1<Q^*$，故$f'(Q^*)>f'(Q_1)$。因$f'(Q^*)<0$，故有$1<\frac{f'(Q_1)}{f'(Q^*)}$，即$1<\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-Q_0}$，$Q_1-Q_0<Q_2-Q_1$。

证毕

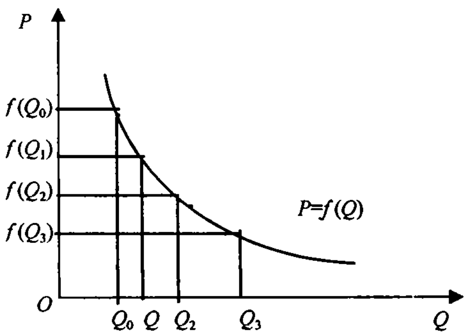

图 3　四段定价法

2　四段定价条件下垄断厂商收益最大化条件

设 Q_0和 Q_3既定，且$Q_0<Q_3$。所谓四段定价是指将区间$(Q_0,Q_3]$分为三个区间$(Q_0,Q_1],(Q_1,Q_2]$和$(Q_2,Q_3]$，其中 Q_1、Q_2满足$Q_0<Q_1<Q_2<Q_3$，当$Q\in(Q_0,Q_1]$时，价格$P=f(Q_1)$，当$Q\in(Q_1,Q_2]$时价格$P=f(Q_2)$，当$Q\in(Q_2,Q_3]$时，价格$P=f(Q_3)$，当$Q\in(0,Q_0]$时，价格$P=f(Q_0)$。四段定价法如图 3 所示。

在四段定价条件下，垄断厂商的总收益为
$$TR=f(Q_1)(Q_1-Q_0)+f(Q_2)(Q_2-Q_1)+f(Q_3)(Q_3-Q_2)+f(Q_0)Q_0 \tag{12}$$

记 TR 对 Q_1 和 Q_2 的偏导数分别为 $g_1(Q_1)$ 和 $g_2(Q_2)$，即

$$g_1(Q_1)=\frac{\partial TR}{\partial Q_1}=(Q_1-Q_0)f'(Q_1)+f(Q_1)-f(Q_2) \tag{13}$$

$$g_2(Q_2)=\frac{\partial TR}{\partial Q_2}=(Q_2-Q_1)f'(Q_2)+f(Q_2)-f(Q_3) \tag{14}$$

TR 取最大值的必要条件为

$$g_1(Q_1)=(Q_1-Q_0)f'(Q_1)+f(Q_1)-f(Q_2)=0 \tag{15}$$

$$g_2(Q_2)=(Q_2-Q_1)f'(Q_2)+f(Q_2)-f(Q_3)=0 \tag{16}$$

下面证明式(5)和式(6)构成的联立方程组必然有解,且其解 Q_1 和 Q_2 满足 $Q_0<Q_1<Q_2<Q_3$。证明分为如下几个步骤:

1) $Q_1\neq Q_0$　如果 $Q_1=Q_0$，则由 $g_1(Q_0)=f(Q_0)-f(Q_2)=0$ 可以得到 $Q_0=Q_2$,即 $Q_0=Q_1=Q_2$。而由 $g_2(Q_1)=f(Q_1)-f(Q_3)=0$ 可知 $Q_1=Q_3$，即 $Q_0=Q_1=Q_2=Q_3$。这与 $Q_0<Q_3$ 的假定相矛盾，故必有 $Q_1\neq Q_0$。

2) $Q_1\neq Q_2$　如果 $Q_1=Q_2$，则由 $g_1(Q_2)=(Q_2-Q_0)f'(Q_2)=0$ 可以得到 $Q_2=Q_0$,即 $Q_0=Q_1=Q_2$。而由 $g_2(Q_1)=f(Q_1)-f(Q_3)=0$ 可以得到 $Q_1=Q_3$，即 $Q_0=Q_1=Q_2=Q_3$。这与 $Q_0<Q_3$ 的假定相矛盾，故必有 $Q_1\neq Q_2$。

因 $Q_1\neq Q_0,Q_1\neq Q_2$。从而由式(15)和式(16)可以得到

$$f'(Q_1)=\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0} \tag{17}$$

$$f'(Q_2)=\frac{f(Q_3)-f(Q_2)}{Q_2-Q_1} \tag{18}$$

根据式(17)和式(18)可以证明下述两个结论。

3) $Q_0<Q_1<Q_2$　如果 $Q_2<Q_1$,则 $f(Q_2)-f(Q_1)>0$。由式(17)得 $\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0}<0$,从而有 $Q_1-Q_0<0$,即 $Q_1<Q_0$。这将导出 $Q_2<Q_1<Q_0$。由式(18)可得 $f'(Q_2)=\frac{f(Q_3)-f(Q_2)}{Q_2-Q_1}<0$。因假定 $Q_2-Q_1<0$,故有 $f(Q_3)>f(Q_2)$,即 $Q_3<Q_2$。这就有 $Q_3<Q_2<Q_1<Q_0$,从而 $Q_3<Q_0$，这与 $Q_0<Q_3$ 的假定相矛盾，故必有 $Q_1<Q_2$。由式(17)有 $\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0}<0$。因 $Q_1<Q_2$,故 $f(Q_2)-f(Q_1)<0$,从而必有 $Q_1-Q_0>0$,即 $Q_0<Q_1$，这就证明了 $Q_0<Q_1<Q_2$。

4) $Q_0<Q_1<Q_2<Q_3$　只需要证明 $Q_2<Q_3$。由式(18)可得 $\frac{f(Q_3)-f(Q_2)}{Q_2-Q_1}<0$。因 $Q_2-Q_1>0$，故有 $f(Q_3)-f(Q_2)<0$,即 $Q_2<Q_3$，于是有 $Q_0<Q_1<Q_2<Q_3$。

综上所述，有下述结论。

定理 3　使总收益 TR 达到最大的 Q_1 和 Q_2 必满足下述方程

$$f(Q_1)=\frac{f(Q_2)-f(Q_1)}{Q_1-Q_0} \tag{19}$$

$$f(Q_2)=\frac{f(Q_3)-f(Q_2)}{Q_2-Q_1} \tag{20}$$

Q_2和Q_3满足不等式

$$Q_0<Q_1<Q_2<Q_3 \tag{21}$$

类似于定理1，有下述结论。

定理4 设Q_2,Q_3使总收益TR达到最大,则下述不等式成立

$$Q_1-Q_0<Q_2-Q_1<Q_3-Q_2 \tag{22}$$

证明 因$Q_0<Q_1<Q_2$,Q_1满足式(19),根据定理2有$Q_1-Q_0<Q_2-Q_1$。因$Q_1<Q_2<Q_3$,Q_2满足式（20），根据定理2有$Q_2-Q_1<Q_3-Q_2$。从而有$Q_1-Q_0<Q_2-Q_1<Q_3-Q_2$。 证毕

例2 设需求函数为$P=f(Q)=\dfrac{A}{Q}$，A为正常数。Q_0,Q_3既定，且$Q_0<Q_3$，求四段定价条件下使垄断厂商收益达到最大的分段点Q_1和Q_2。

解 根据定理3，Q_1和Q_2满足方程

$$-\frac{A}{Q_1^2}=\frac{(A/Q_2)-(A/Q_1)}{Q_1-Q_0} \tag{23}$$

$$-\frac{A}{Q_2^2}=\frac{(A/Q_3)-(A/Q_2)}{Q_2-Q_1} \tag{24}$$

由式（23）和式（24）可分别得到

$$Q_1=\sqrt{Q_0Q_2} \tag{25}$$

$$Q_2=\sqrt{Q_1Q_3} \tag{26}$$

由式（25）和式（26）可以解出

$$Q_1=Q_0^{\frac{2}{3}}Q_3^{\frac{1}{3}} \tag{27}$$

$$Q_2=Q_0^{\frac{1}{3}}Q_3^{\frac{2}{3}} \tag{28}$$

记$d=\sqrt[3]{Q_3/Q_0}$，则容易得到下述结果

$$\frac{Q_1}{Q_0}=\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{Q_3}{Q_2}=d \tag{29}$$

$$\frac{Q_2-Q_1}{Q_1-Q_0}=\frac{Q_3-Q_2}{Q_2-Q_1}=d \tag{30}$$

$$Q_0 < Q_1 = dQ_0 < Q_2 = d^2Q_0 < Q_3 = d^3Q_0 \tag{31}$$

$$Q_1 - Q_0 = (d-1)Q_0 \qquad Q_2 - Q_1 = d(d-1)Q_0 \qquad Q_3 - Q_2 = d^2(d-1)Q_0 \tag{32}$$

还容易得到垄断厂商获得的最大收益为

$$\begin{aligned} TR &= Q_0 f(Q_0) + Q_1 f(Q_1) + Q_2 f(Q_2) - Q_0 f(Q_1) - Q_1 f(Q_2) - Q_2 f(Q_3) = \\ & A + A + A - \frac{AQ_0}{Q_1} - \frac{AQ_1}{Q_1} - \frac{AQ_2}{Q_3} = \\ & 3A - A(\frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d}) = \\ & 3A(1 - \frac{1}{d}) = 3A(1 - \sqrt[3]{Q_0 / Q_3}) \end{aligned} \tag{33}$$

3 结 束 语

本文研究了非线性需求函数条件下垄断厂商采用三段定价和四段定价方法时收益最大化条件，关于非线性需求函数条件下垄断厂商采用任意分段定价的收益最大化条件将另文讨论。

参 考 文 献

1　唐小我. 二度价格歧视情形下垄断厂商收益最大化条件. 电子科技大学学报，1997，26（2）:194~198

2　宋承先. 现代西方经济学.上海:复旦大学出版社，1994

Study of Second Degree Price Discrimination Under Condition of Non-linear Demand Function

Tang Xiaowo

(Management College,UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　In this paper,the problem of second price discrimination under the conditions of non-linear demand function is studied. The maximum conditions of monopoly revenue in the case of three stage pricing and four stage pricing are given. These new results provide a good foundion for more general analysis of second degree discrimination.

Key words　non-linear demand function;　second degree price discrimination;　revenue maximizing;　monopoly firm