

• 学术论文与技术报告 •

## 基于数据阵共轭重构的 MUSIC 角估计算法\*

何子述\*\* 黄振兴 向敬成

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**【摘要】** 介绍了一种利用接收数据及其共轭重构得到新的数据矩阵,然后借助于数据阵奇异值分解实现的修正 MUSIC 算法,并指出了这将有助于改善协方差矩阵特征值的分布,从而提高信号到达方向(DOA)的估计性能。在相同的信噪比和快拍数条件下,该方法无论是在角估计的均方误差、信号源角分辨能力等方面均优于普通的 MUSIC 算法,并给出了验证理论分析的计算机仿真结果。

**关键词** 多信号分类算法; 阵列信号处理; 超分辨; 信号到达方向估计

**中图分类号** TN971.2; TN911.72

信号的 DOA 估计属于信号参量估计的范畴,而空间信号源的角度超分辨则是对位于同一波束宽度内的两个以上信号源的 DOA 估计(突破瑞利准则的限制)。目前受到学者们普遍认可的信号 DOA 估计的主要方法有最大熵 / 线性预测(MEM/LP)法、最小方差不失真响应(MVDR)法、多信号分类法(MUSIC)和最小范数法(MNM)等。多旁瓣对消(MSLC)系统,由于将非视向方向的信号源当作干扰被抑制掉,因此可用于信号 DOA 估计及实现角度超分辨<sup>[1,2]</sup>。

根据经典的信号参量估计理论,衡量参量估计的性能之一是看估计量的方差是否达到或接近 C-R 下限(Cramer-Rao Lower Bound)。在上述各种 DOA 估计方法中, MUSIC 法的 DOA 估计方差非常接近于 C-R 下限<sup>[3-5]</sup>。MUSIC 算法是将接收数据的协方差矩阵分离出信号子空间和噪声子空间,利用信号方向向量与噪声子空间正交的性质来构造空间扫描谱,实现信号的 DOA 估计。

本文在文献[3]的基础上,用接收数据及其复共轭进行适当排列构造一新的数据矩阵,直接对该数据阵进行奇异值分解(SVD),然后用 MUSIC 方法实现信号的 DOA 估计(以下简称 MMUSIC)。这一新的数据矩阵,与 EBLP(前后向预测)中的增广数据阵有完全相同的形式,它将有助于改善协方差矩阵特征值的分布,减小信号的 DOA 估计方差,提高对信号源的角度分辨能力。

### 1 MUSIC 算法原理

考虑一  $M$  元均匀线阵,设有  $N(N < M)$  个互不相关的窄带信号源平面波辐射到线阵上,信源方向分别为  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ 。在第  $k$  次快拍,得到的数据向量为

$$X(k) = AS(k) + n(k) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

式中  $X(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$  为  $M$  个阵元输出;  $A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_N)]$ ,  $a(\theta_i) = [1, e^{-j\phi}, \dots, e^{-j(M-1)\phi}]^T$ ,  $\phi_i = [(2\pi d)/\lambda] \sin \theta_i$ ,  $T$  表示转置,  $\lambda$  为载波波长,  $d$  为阵元间距,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $S(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_N(k)]^T$ ,  $s_i(k)$  为第  $i$  个平面波的复振幅;  $n(k) = [n_1(k), n_2(k), \dots, n_M(k)]^T$ ,  $n_i(k)$  为零均值、方差为  $\sigma^2$  的白噪声,且与信号源不相关;  $K$  为快拍次数。

$X(k)$  的协方差矩阵  $R_0$  为

$$R_0 = E[X(k)X^H(k)] = APA^H + \sigma^2 I \quad (2)$$

式中  $P = E[S(k)S^H(k)]$ ,  $I$  为  $M$  阶单位矩阵,令

$$Y(k) = J\bar{X}(k) \quad (3)$$

1998年9月8日收稿,1998年12月31日修改定稿

\* 电子部预研基金资助项目

\*\* 男 36岁 硕士 副教授

式中  $\bar{X}(k)$  表示  $X(k)$  的复共轭;  $J$  是  $M \times M$  阶交换矩阵, 它将向量  $X(k)$  的元素倒排, 定义为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

显然  $J^2=I$ , 用  $\bar{A}$  表示矩阵  $A$  的复共轭, 则  $Y(k)$  的协方差矩阵  $R_1$  为

$$R_1 = E[Y(k)Y^H(k)] = \overline{JAP}A^H J + \sigma^2 I = \overline{JR_0}J \quad (5)$$

令

$$R = R_0 + R_1 = APA^H + \overline{JAP}A^H J + 2\sigma^2 I \quad (6)$$

可以证明<sup>[3]</sup>, 若向量  $U$  是矩阵  $APA^H$  的零特征值对应的特征向量, 则  $U$  一定是矩阵  $\overline{JAP}A^H J$  的零特征值对应的特征向量。按照 MUSIC 算法关于信号子空间和噪声子空间的定义, 协方差矩阵  $R_0$ 、 $R_1$  及他们之和  $R$  具有相同的噪声子空间。

对矩阵  $R$  进行特征值/特征向量分解, 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  和  $V_1, V_2, \dots, V_M$  分别为  $R$  的特征值和特征向量, 且有

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N > \lambda_{N+1} = \dots = \lambda_M = 2\sigma^2$$

用 MDL 或 AIC 方法估计出信号源数  $N$  后<sup>[1]</sup>, 则可构造出 MUSIC 算法的空间谱为

$$P(\theta) = 1 / \sum_{m=N+1}^M |V_m^H a(\theta)|^2 \quad (7)$$

式中  $a(\theta)$  如式(1)中  $A$  矩阵的列向量。以上便是 MMUSIC 算法的原理。在实际计算中, 通常考虑过程为具有遍历性的平稳随机过程, 用时间平均来估值集总平均构造矩阵  $R_0$ 、 $R_1$  和  $R$ , 设共进行  $K$  次快拍

$$\hat{R}_0 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X(k)X^H(k) \quad (8)$$

$$\hat{R} = \hat{R}_0 + \hat{R}_1 = \hat{R}_0 + \overline{J\hat{R}_0}J \quad (9)$$

## 2 基于数据阵 SVD 的 MMUSIC 算法

前面介绍的 MMUSIC 算法, 首先必须按式(9)构造协方差矩阵  $\hat{R}$ , 然后再进行特征值和特征向量分解。直接利用数据矩阵进行奇异值分解(SVD)的方法已在普通 MUSIC 等算法中得到十分广泛地应用。该方法无需构造协方差矩阵  $R$ , 而在数据域上进行分解, 可提高计算的数值稳定性和数值精度。同时由于基于 Jacobi 旋转的 SVD 算法可容易地用 systolic 阵列处理器实现, 从而使算法的 VLSI 硬件实现成为可能<sup>[1]</sup>。下面给出直接用数据阵 SVD 实现 MMUSIC 的方法。

设系统共进行了  $K$  次快拍, 则可得数据阵  $B \in C^{M \times K}$

$$B = [X(1), X(2), \dots, X(K)] \quad (10)$$

由  $B$  构造数据阵  $D \in C^{M \times 2K}$

$$D = [B \quad \overline{JB}] \quad (11)$$

比较式(9)可得

$$\frac{1}{K} DD^H = \frac{1}{K} (BB^H + \overline{JB}B^H J) = \hat{R}$$

用 Jacobi SVD 算法对矩阵  $D$  进行奇异值分解, 可得

$$D = V \Sigma U^H \tag{12}$$

式中  $V$ 、 $U$  分别为  $D$  的左、右奇异向量构成的酉阵； $\Sigma$  为除  $(i,i)$  位置 ( $i=1, 2, \dots, M$ ) 是  $D$  的奇异值外，其余元素均为零的矩阵，不计常数  $K$ ，则有

$$\hat{R} = DD^H = V \Sigma^2 V^H \tag{13}$$

数据阵  $D$  的左奇异向量，即为  $R$  的特征向量，故可由数据阵  $D$  的 SVD 求得 MMUSIC 算法的空间谱式(7)。

### 3 信号 DOA 估计方差与协方差矩阵特征值的关系

MMUSIC 方法与普通 MUSIC 方法形式完全相同，仅是用于求特征分解的协方差矩阵不同，前者用的是  $\hat{R}_0 + \hat{R}_1$ ，后者用的是  $\hat{R}_0$ 。采用协方差矩阵  $\hat{R}_0 + \hat{R}_1$ ，即将所采集的数据共轭重排再用一次，等效于提高了信噪比，将改善协方差矩阵特征值的分布，有助于减小 DOA 估计的方差，因为 DOA 估计的方差与特征值间的关系为<sup>[6]</sup>

$$E\{(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2\} = \frac{\sigma^2}{2K} \left[ \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{(\sigma^2 - \lambda_m)^2} |a^H(\theta_i) V_m|^2 \right] \bigg/ \left[ \sum_{m=N+1}^M |a^H(\theta_i) V_m|^2 \right] \tag{14}$$

式中  $d(\theta_i) = da(\theta_i) / d\theta_i$ ， $\sigma^2$ 、 $M$ 、 $N$ 、 $K$ 、 $a(\theta_i)$  如式(1)； $V_m$  如式(7)，为特征向量。

从式(14)可看出，信号子空间特征向量所对应的特征值  $\lambda_m$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ) 愈接近于噪声方差  $\sigma^2$ ，则 DOA 估计的方差愈大，反之则 DOA 估计的方差愈小。计算机模拟结果表明，本文所述的 MMUSIC 方法，其差值  $\lambda_m - \sigma^2$  明显大于普通 MUSIC 方法的差值 ( $m=1, \dots, N$ )，表明 MMUSIC 方法 DOA 估计性能优于普通的 MUSIC 方法。

### 4 仿真计算结果

为了检验基于数据阵  $D$  的 SVD 的 MMUSIC 算法的性能，采用式(1)给出的数据模型进行仿真实验，同样的数据分别用于普通 MUSIC 算法和基于式(11)的 MMUSIC 算法，取阵元间距  $d=0.5\lambda$ ，得到如下的试验结果（虚线为 MMUSIC 方法）。

1) 图 1 是两种算法在不同信噪比条件下，角估计均方误差曲线。条件为：阵元数  $M=4$ ，信源角位置分别为： $0^\circ$ ， $20^\circ$ ，快拍次数  $K=10$ ，纵坐标为估值误差均方根值，此时波束宽度约为  $38^\circ$ 。

2) 图 2 是两种算法在不同信噪比条件下，能正确分辨两个信号源的概率，条件为：阵元数  $M=9$ ，信源位置为  $-4^\circ$ ， $3^\circ$ ， $25^\circ$ ，快拍次数  $K=20$ 。纵坐标为分辨出  $-4^\circ$  和  $3^\circ$  两信源的概率。

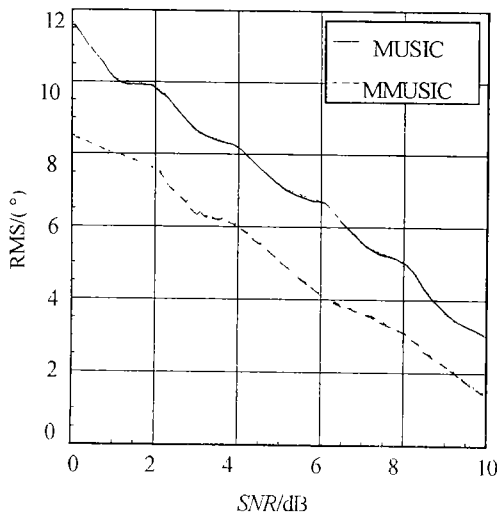


图 1 角估计误差角均方根曲线

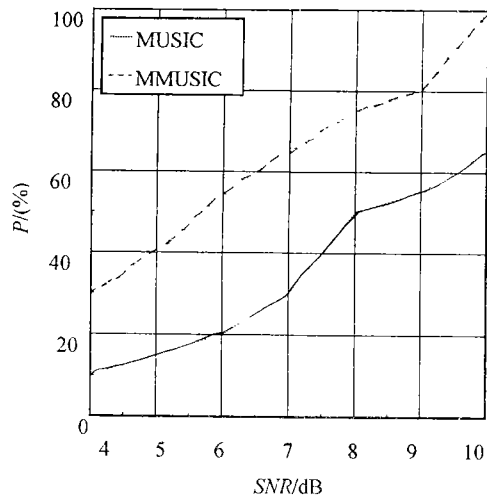


图 2 信号源角分辨概率

- 3) 图 3 为两种算法在不同信噪比条件下, 协方差矩阵的特征值分布曲线。条件为: 阵元数  $M=9$ , 信源角位置分别为  $0^\circ, 10^\circ$ , 快拍次数  $K=20$ , 特征值排序为  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \dots > \lambda_9$ , 图 3 中曲线纵坐标为  $\lambda_2 - \lambda_3$ , 即信号子空间对应的最小特征值与噪声子空间对应的最大特征值之差。

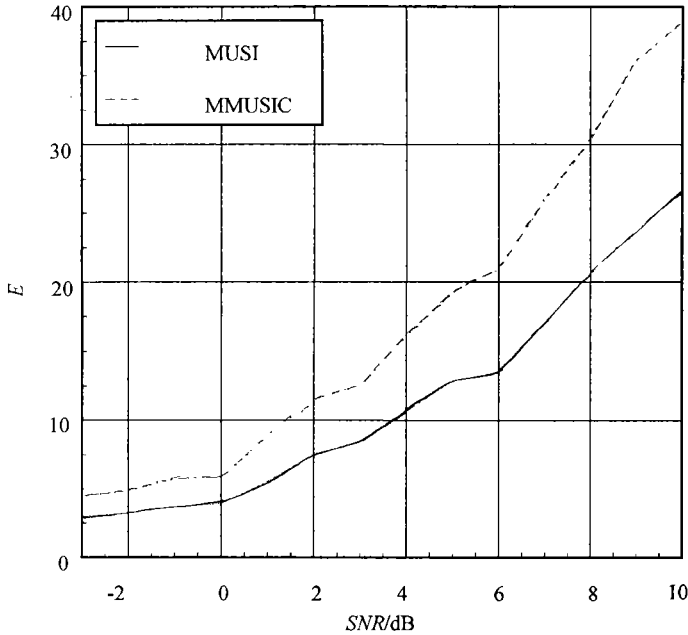


图 3 特征值分布曲线 ( $\lambda_2 - \lambda_3$ )

高了 DOA 估计的性能。

本文提出的数据阵  $D$ , 同前后向线性预测中的增广数据阵完全相同, 与 FBLP 中的增广数据阵构成的协方差阵一样, 由数据阵  $D$  构成的协方差阵  $R$  除具有 Hermitian 对称性外, 还具有 Hermitian 各自对称性<sup>[7]</sup>, 即满足  $R = J \bar{R} J$ , 文献[3]称其为共轭对称约束, 这种共轭对称性在快拍数有限时, 将有助于提高 DOA 的估计性能<sup>[3]</sup>。当然在快拍数趋于无穷大时, MMUSIC 方法和 MUSIC 方法的估计方差都趋于最佳值——C-R 下限。

## 参 考 文 献

- 1 Haykin S, Keily J P. Some aspects of array singal processing, IEE Proc, 1992, 139:1~25
- 2 何子述, 黄振兴, 庞晓凤. 用多旁瓣对消 MSLC 系统实现角度超分辨. 电子科技大学学报, 1997, 26(增刊): 101~107
- 3 Debasis Kundu. Modified MUSIC algorithm for estimating DOA of singals. Singal Processing, 1996, 48:85~90
- 4 Kaveh M, Barabell A J. The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithm in resloving plane waves in noise. IEEE Trans on ASSP, 1986, 34: 331~341
- 5 Stoica P, Nehorai A. MUSIC, maximum like-hood and Cramer-Rao bound. IEEE Trans on ASSP, 1989, 37: 720~741
- 6 Haykin S. Advances in spectrum analysis and array processing, Volume II. New Jerrey: Prentice-Hall, 1991: 263~293
- 7 Haykin S. Aaptive filter theory. New Jerrey: Prentice-Hall, 1986:325~330

## 5 结 论

从计算机仿真试验结果可以看出, 本文所述的基于数据阵共轭重构的 MMUSIC 方法, 在相同的 SNR 和快拍数条件下, 无论是信号 DOA 估计的角谱图或估计方差, 还是对相邻信源的角度超分辨性能, 都明显优于普通 MUSIC 方法。这是因为通过数据共轭重排的再利用, 改善了协方差矩阵的特征值分布, 从而提

# A Modified MUSIC Algorithm for Estimation of Angles Based on Re-constructing Data Matrix with Conjugate Data

He Zishu Huang Zhenxing Xian Jingcheng

(College. of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** This paper gives a modified MUSIC (MMUSIC) algorithm based on the singularity decomposition of the data matrix which is re-constructed by the received data and their conjugatings. This method can change the eigenvalue distributions of the covariance matrix and improve the performances of the signal DOA estimation. With the same *SNR* and snapshot number, the performances of MMUSIC algorithm are better than that of MUSIC algorithm not only in the estimation of DOA of singals, but also in the resolution of the arrival angle for singals. Finally, the simulation results confirming the theoretical analysis are presented.

**Key words** MUSIC algorithm; array singal processing; superresolution; estimating DOA for singals

• 科研成果介绍 •

## 宽带数字激光大气通信系统

主研人员: 胡 渝 皮德忠 李 贤 何 毅 卢国纬 曾广荣

宽带数字激光大气通信系统采用  $10.6 \mu\text{mCO}_2$  激光源, 采用收发合一天线, 声光调频光外差接收, 终端码率内 8.448 Mb/s, 副载波采用 DPSK 调制。其中自动搜索、瞄准及对光功能由双向精扫与双向粗扫子系统共同配合完成, 相应的光电伺服控制系统控制其精扫和粗扫的变化。系统作用距离为 3 km~5 km, 能够全天候工作, 其读码率优于  $10^{-6}$ , 实现了“DPSK / FM—相干光通信”的新体制, 提高了克服大气湍流对激光信息传输影响的能力。

该系统在我国首次实现了传输 8.448 Mbps 数字信息, 具有定点自动搜索、瞄准及对光的  $\text{CO}_2$  激光大气通信, 其技术处于国内领先水平, 达到当前国际先进水平。

•科 下•