

实正弦信号的快速相位差分频率估计方法*

林云松** 黄 勇 肖先赐

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

【摘要】 基于最小均方误差相位差分频率估计原理,提出了能够直接处理实正弦信号的相位差分频率估计算法。新的修改算法利用零交越或FFT变换,能快速有效地在时域或频域上得到实正弦信号的相位信息,改善了频率估计的SNR阈值,且便于工程实现。

关键词 频率估计; 相位差分; 过零点; FFT变换

中图分类号 TN911.5; TN971.1

短数据快速测频技术将成为未来电子战数字接收机的关键技术之一,由Tretter提出并经Kay修改后的基于最小均方误差的相位差分频率估计法目前正引起相当的重视^[1]。相位差分频率估计法是针对复指数信号模型提出的。为下面推导方便,先将基于最小均方误差的相位差分频率估计基本算法简述如下。

考虑复指数信号加高斯白噪声模型

$$x_n = Ae^{j(\omega_0 n + \theta)} + w_n \quad n=0,1,2,\dots,N-1$$

式中 w_n 为零均值、方差为 σ^2 的高斯白噪声序列。对于高的信噪比,即 $\sigma^2/A^2 \ll 1$ 有^[1]

$$x_n = Ae^{j(\omega_0 n + \theta + u_n)} \quad (1)$$

式中 u_n 为零均值、方差为 $\sigma^2/2A^2$ 的高斯白噪声序列。为了避免相位展开,令 $\Delta_n = \angle x_{n+1} - \angle x_n$, 其中 $\angle x_n = \omega_0 n + \theta + u_n$ 。则有 $\Delta_n = \omega_0 + u_{n+1} - u_n, n=0,1,\dots,N-2$ 。其中 ω_0 的最小方差无偏估计子为^[1]

$$\hat{\omega}_0 = \sum_{n=0}^{N-2} w(n) \angle x_n^* x_{n+1} \quad (2)$$

式中 $w(n) = \frac{3N/2}{N^2-1} \left\{ 1 - \left[\frac{n-(N/2-1)}{n/2} \right]^2 \right\}$, 其估计方差为

$$Var(\hat{\omega}_0) = \frac{6}{\frac{A^2}{\sigma^2} N(N^2-1)} \quad (3)$$

式(3)与Cramer-Rao界是一致的^[2]。最小均方误差的相位差分频率估计法利用SNR较高时,把对复指数信号的加性高斯白噪声等效到其相位中去(见式(1)),从而可忽略信号幅度对频率估计的影响,并利用相位差分避免了相位展开。最后得到的频率估计方差当 $SNR \rightarrow \infty$ 而渐近有效地逼近Cramer Rao界,其频率估计SNR阈值约为10dB。

在实际应用中,输入信号往往是实正弦波,通常采用正交采样得到其相位信息。但I、Q通道的理想匹配以及可实现的运算速度都限制了宽开频段内复信号的产生,为此本文提出基于零交越和FFT的相位差分频率估计的修改算法。

1 基于零交越的相位差分测频算法

考虑到式(1)中复指数信号模型的实数过零点,当 $x(t) = \text{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t + \theta + u(t))}\} = 0$ 时,得到 $\omega_0 t + \theta + u(t) = k\pi + (\pi/2), k$ 为整数。过零点发生时刻为

$$t_n = k_n T + \theta' + \frac{u_n}{\omega_0} \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (4)$$

1998年6月10日收稿,1998年6月29日修改定稿

* 电子部预研基金资助项目

** 男 29岁 博士生

其中 $T = \pi / \omega_0$ 为正弦信号半周期, 且 $\theta' = 1 / \omega_0 (\frac{\pi}{2} - \theta)$ 。对式 (4) 作差分可得到

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n = T + \frac{(u_{n+1} - u_n)}{\omega_0} \quad n=0,1,\dots,N-2 \quad (5)$$

采用式 (2) 中给出的最小均方估计子便能够得到实正弦信号周期的估计。零交越测频算法实际上是从实过零点中得到正弦信号的相位信息。但得到的相位信息随信号频率的降低而受噪声的影响就越严重, 尤其当 SNR 较低时, 会出现许多虚假的过零点。其估计方差为

$$\text{Var}(\hat{T}) = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{6}{\frac{A^2}{\sigma^2} N(N^2 - 1)} \quad (6)$$

为了降低噪声对过零点时刻的影响, 可定义信号的平均序列 $y_n = \frac{(x_n + x_{n+1})}{2}$, 可得

$$y_n = A e^{j\omega_0(k+1/2)+\theta} \left[\cos\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + \frac{\hat{w}_n + \hat{w}_{n+1}}{2} \right] \quad (7)$$

式中 $\hat{w}_n = \frac{w_n}{A} e^{-j(\omega_0 n + \theta)}$ 是方差为 σ^2/A^2 的复高斯白噪声。当信噪比较高时, 即 $\sigma^2/A^2 \ll 1$, 有

$$\angle y_n = n\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} + \theta + \frac{u_n + u_{n+1}}{2 \cos(\omega_0/2)} \quad (8)$$

与前面类似的推导, 新的平均序列 y_n 的实过零点时刻是

$$t_n = k_n T + \theta' + \frac{u_n + u_{n+1}}{2 \cos(\omega_0/2)} \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (9)$$

式中 $\theta' = \frac{1}{\omega_0} (\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_0}{2} - \theta)$ 。对式 (9) 作差分运算可得

$$\Delta_n = T + \frac{(u_n - u_{n+2})}{2 \cos(\omega_0/2)} \quad n=0,1,\dots,N-2 \quad (10)$$

式 (10) 表明, 平均序列的过零点不会随信号频率的降低而受噪声的严重影响。估计方差为

$$\text{Var}(\hat{T}) = \frac{1}{4 \cos^2(\omega_0/2)} \frac{6}{\frac{A^2}{\sigma^2} N(N^2 - 1)} \quad (11)$$

比较式 (6) 和式 (11) 可发现, 平均序列较原序列的在低频段的估计方差明显降低, 计算机模拟结果也证实了这点。在计算机模拟时, 采用线性插值在相邻两个符号改变的采样数据间得到过零点。当信号频率较高时, 线性插值将引入较大误差, 由线性插值引入的最大误差约为 4.5%^[3]。因此, 平均序列零交越测频估计范围应小于 $\pi/2$ 。

为解决全频段 $0 \sim \pi$ 范围内的测频, 在实际工程实现中可采用两路并行方案。第一个通道直接采用平均序列零交越测频得到输出 $\hat{\omega}_0$; 第二通道对采样数据进行 $(-1)^n$ 调制后, 再采用平均序列零交越测频。若第一通道的频率输出落在 $0 \sim \pi/2$ 范围内, 则真实的频率输出为 $\hat{\omega}_0$; 若第二通道的频率输出落在 $0 \sim \pi/2$ 范围内, 那么真实的频率输出为 $\pi - \hat{\omega}_0$ 。

2 基于 FFT 的相位差分测频算法

考虑信号 $y_n = x_n + w_n$, $x_n = A \cos(2\pi f_0 n + \theta)$, w_n 为高斯白噪声。把 y_n 分成不重叠的 M 段, 每段数据长度是 L , $M_1 = y_0, y_1, \dots, y_{M-1}$, 其中 $y_m = y[mL], \dots, y[(m+1)L-1]$ 。

对 M_1 作 FFT 后得 $Y = Y_0, Y_1, \dots, Y_{M-1}$, 且 Y 是独立同分布的高斯随机变量。设 $f_0 = (k/L) + (\delta f/L)$ ($0 \leq k < L/2$, $-1/2 \leq \delta f < 1/2$)。可以得到

$$Y_m(l) = \frac{1}{2} A \left(e^{j\theta} e^{j2\pi\delta f m} \sum_{p=0}^{L-1} \frac{e^{j2\pi(k+\delta f-l)\frac{p}{L}}}{\sqrt{L}} + e^{-j\theta} e^{-j2\pi\delta f m} \sum_{p=0}^{L-1} \frac{e^{j2\pi(-k-\delta f-l)\frac{p}{L}}}{\sqrt{L}} \right) + W_m(l) = \frac{1}{2} A (e^{j\theta} e^{j2\pi\delta f m} S_+(l) + e^{-j\theta} e^{-j2\pi\delta f m} S_-(l)) + W_m(l) \tag{12}$$

对于给定的 $l (0 \leq l < L/2)$, 有 $|S_+(l)| \gg |S_-(l)|$, 因此可得到

$$Y_m(l) \approx \frac{1}{2} A e^{j\theta} e^{j2\pi\delta f m} S_+(l) + W_m(l) \tag{13}$$

式中 $W_m(l)$ 为 i.i.d. 高斯随机变量, 方差为 σ^2 .

对给定的 l , 注意到式(13)即为复指数模型, 可采用相位差分法得到频率估计为

$$\hat{\delta f} = \frac{1}{2\pi} \left[\angle \left(\sum_{m=0}^{M-2} w[m] e^{j\angle(Y_m(l_c) Y_{m+1}^*(l_c))} \right) \right]_{2\pi} \tag{14}$$

式中 $l_c = \arg \max_l |Z[l]|$, $Z[l] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |Y_m[l]|^2$, $[\cdot]_{2\pi}$ 是对 2π 取模算子.

当信号的频率正好位于 FFT 变换的输出单元格上时 (即 $k = l_c, \delta f = 0$), 可得到最大处理增益 $|S_+(l_c)| = \sqrt{L}$, 由式(3)可推出其频率估计方差为

$$\text{Var}(\hat{\omega}_0) = \frac{6}{\frac{A^2}{4\sigma^2} N(N^2 - L^2)} \tag{15}$$

当信号的频率不是正好位于 FFT 的输出单元格上时, 可采用以下任一种方法进行修正:

1) 直接估计谱峰位置^[3]

$$l'_c = l_c \pm \frac{Y_m(l_c)}{Y_m(l_c) + Y_m(l_c \pm 1)} \tag{16}$$

式中 \pm 号由 $Z[l_c + 1]$ 和 $Z[l_c - 1]$ 中较强的一个决定. 得到谱峰位置估计后, 再计算新的 $Y_m(l'_c)$.

2) 加权平均法^[4] 令 $P_m(l_c) = \alpha Y_m(l_c) - \beta Y_m(l_c \pm 1)$, 其中选取 $\alpha = 0.64, \beta = 0.36$. 则

$$\hat{\delta f} = \frac{1}{2\pi} \left[\angle \left(\sum_{m=0}^{M-2} w[m] e^{j\angle(P_m(l_c) P_{m+1}^*(l_c))} \right) \right]_{2\pi} \tag{17}$$

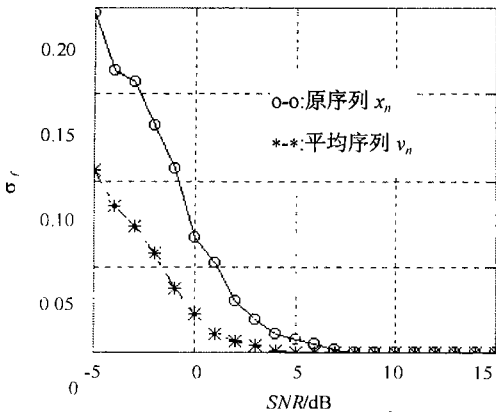


图 1 零边越法低频段测频标准差

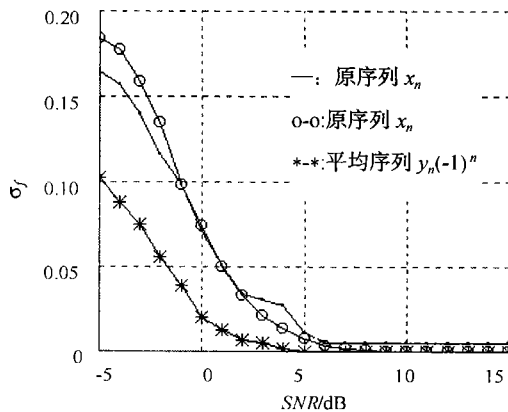


图 2 零交越法高频段测频标准差

3 计算机模拟

3.1 零交越测频的计算机模拟结果

1) 低频段测频标准差 $f_0 = 0.05$, 过零点数 $L = 161\ 000$ 次独立实验的纯正弦信号测频估计标准差 σ_f 如图 1 所示. 平均序列的标准差较原序列的要低得多, 且有较低的 SNR 阈值.

2) 高频段测频标准差 $f_0 = 0.45$, 过零点数 $L = 161\ 000$ 次独立实验的纯正弦信号测频估计标准差 σ_f 如图 2 所示. 由于线性插值引入的固有误差, 当 SNR 增大时, 原序列的估计误差不会降低 (约 4.5%); 调制后的平均序列的标准差较原序列的要低得多, 且有较低的 SNR 阈值.

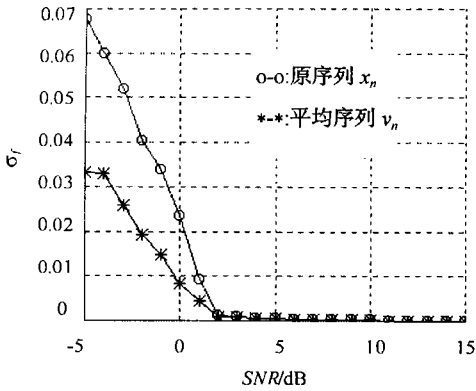


图3 零交叉法中频段测频标准差

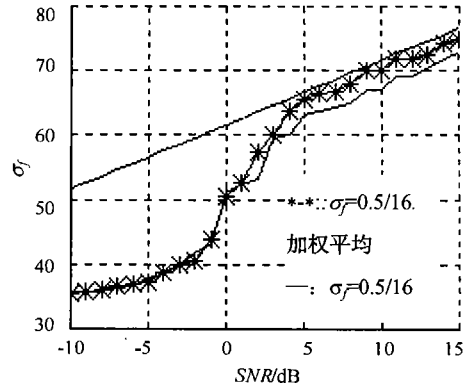


图4 基于FFT测频对数标准差

3) 中频段测频标准差 $f_0=0.2$, 过零点数 $L=161\ 000$ 次独立实验的实正弦信号测频估计标准差 σ_f 如图3所示。平均序列和原序列的标准差大致相当, 且 SNR 阈值亦相当。

3.2 基于FFT测频的计算机模拟结果

图4是1000次独立实验的实正弦信号频率估计的对数标准差 $\sigma_f' = 10 \times \lg(1/\sigma_f)$ 计算机模拟结果 ($\theta=0, f_0=0.25 + \delta f, M=6, L=16, N=96$)。由图4可看出, 加权平均法明显改善了估计性能。另外, 此方法由于采用了FFT变换, 不仅能得到实正弦信号的相位信息, 还增加了算法的处理增益 $|S_c(f)|$, 从而降低了 SNR 阈值。图4中频率估计的 SNR 阈值 < 5 dB, 而基本的相位差分算法的 SNR 阈值为 10 dB^[4]。

4 结束语

根据相位差分的基本原理, 本文修改了基于复指数信号模型的最小均方频率估计法, 得到了能够处理实正弦信号的短数据频率估计算法。计算机模拟结果证明, 新的修改算法不仅改善了频率估计的 SNR 阈值, 且便于工程实现, 故具有较强的实际应用价值。

参考文献

- 1 Steven Kay Statistically/computationally efficient frequency estimation. Proceedings of IEEE International Conference in Acoustic Speech and Signal Processing, 1988:2 292~2 295
- 2 Rife D C, Boorstin R R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations. IEEE Trans on Info Theory, 1974, IT-20:591~598
- 3 林云松, 黄勇, 肖先赐. 宽带数字正交技术及性能分析. 电子科技大学学报 1999, 28(1): 20~23
- 4 Umesh S, Nelson D. Computationally efficient estimation of sinusoidal frequency at low SNR . Proc IEEE International Conference in Acoustic Speech and Signal Proc, 1996:2 797~2 800

Fast Frequency Estimation Methods of Real Sinusoidal Signal from Phase Differences

Lin Yunsong Huan Yong Xiao Xianci

(College of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Based on the principle of minimum mean square error frequency estimation from phase differences, the new modified frequency estimation methods from phase differences directly for real sinusoidal signal are presented in this paper. The new methods can rapidly and efficiently obtain the informations of a real sinusoidal signal's phase on time domain or frequency domain by zero-crossings or FFT transforming. The modified methods can extend the threshold SNR of frequency estimation, and it is easily implemented.

Key words frequency estimation; phase differences; zero-crossings; fast Fourier transform