

ATM 复用器的流体瞬态分析

吴传志* 付诗禄 严尚安

(后勤工程学院基础部 重庆 400016)

【摘要】 设 ATM 网复用器的信元输入率依赖于一个交替更新过程(而非马尔可夫过程), 复用器的输出率恒定不变, 缓冲器的信元初始容量为 0。在此条件下, 应用流体模型和更新理论, 求出了在任意时刻 t 时缓冲器容量 $Q(t)$ 的概率分布, 为缓冲器的设计和控制提供了有力的理论依据。

关键词 ATM 复用器; 两状态信源; 流体模型; 瞬态分析

中图分类号 TN911.2

B-ISDN 是应现代通信的各种需求而设计的一种处理系统, 它能把输入的各类信号如声音、数据、图像及视频等转化为数字信号进行传输。这些信号打成数据包后被高速送入 ATM 复用器并最终输入至目的地。由于 ATM 网传输数据包的速度十分迅速, 人们通常采用流体模型来模拟信号输入。文献[1~4]研究了当输入源是马尔可夫调制过程(MMP)时缓冲器容量的统计性质。本文在此基础上研究了当输入源是单个开关型时的缓冲器容量的瞬态分布, 其控制过程不再是马氏过程, 而是一般的交替更新过程。这种研究意义在于: 1) 实际中的突发性信号用这个模型更为合理。如强弱变化的声音信号, 并不能断定强弱信号时期服从指数分布, 也没有所谓的沉寂期; 2) 由于多状态的 MMP(如视频输入)可根据需要将其转化为本文的模型, 而流体模型输入均为 MMP(文献[1,2]是一个生灭过程, 文献 [5]考虑的几个不同种类的两状态输入的双重迭合仍是 MMP), 均可利用本文模型弄清其瞬态性质。

1 开关型单信源输入输出模型

设有一个交替更新过程, 状态为 0 和 1, 开始时状态为 1。状态 1、0 的持续时间为 Z 、 Y , 两者相互独立, 分布函数为 H 、 G , 又 $X=Z+Y$ 称为一个周期, 分布函数为 $F=H \cdot G$ 。且当过程处于状态 i 时, 信元输入率为 $r_i (i=0,1)$, 缓冲器容量无限, 输出率为 c , 并且假设 $r_1 > c > r_0 > 0$ 。服务规则为 FCFS, 即先到先接受服务, 如图 1、2 所示。记 $Q(t)$ 为任意时刻 t 缓冲器的容量。

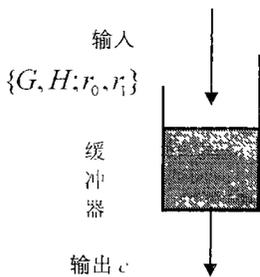


图 1 单信源排队系统

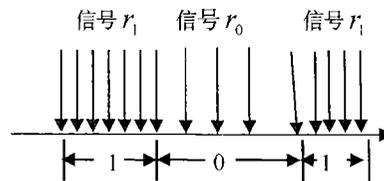


图 2 两状态的输入信源

2 $Q_1(t)$ 的分布

设 $Q_1(t)$ 为在 $[s_{N(t)}, t]$ 这段时间内实际输入量与理论输出量之差, 即

$$Q_1(t) = \begin{cases} (r_1 - c)(t - s_{N(t)}) & I(t) = 1 \\ (r_1 - c)Z + (t - s_{N(t)} - Z)(r_0 - c) & I(t) = 0 \end{cases}$$

其中 $s_{N(t)}$ 表示 t 前最近一次更新时刻, $I(t)$ 为时刻 t 更新过程所处状态。

注意 $Q_1(t)$ 与 $s_{N(t)}$ 以前的历史无关, 过程的每一个更新点即为 $Q_1(t)$ 的再生点, 所以 $\{Q_1(t), t \geq 0\}$ 是一个再生过程, 可以取负值。

记 $\alpha(t, 1, x) = P_r[I(t) = 1, Q_1(t) \leq x]$, 有以下结论:

引理 1 $\alpha(t, 1, x) = \int_0^t h_1(t - y, x) dU(y)$

其中
$$h_1(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x < t(r_1 - c) \\ \bar{H}(t) & \text{若 } x \geq t(r_1 - c) \end{cases}$$

$$U(y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y) \quad F_n \text{ 为 } F \text{ 的 } n \text{ 重卷积}$$

证明
$$\alpha(t, 1, x) = P_r[I(t) = 1, Q_1(t) \leq x] = \int_0^t P_r(I(t) = 1, Q_1(t) \leq x | X = y) dF(y) = \int_0^t P_r(I(t - y) = 1, Q_1(t - y) \leq x) dF(y) + \int_t^{\infty} P_r(Z > t, Q_1(t) \leq x | X = y) dF(y) = \int_0^t \alpha(t - y, 1, x) dF(y) + P_r[Z > t, Q_1(t) \leq x, X > t]$$

当首次更新时刻 $X = y < t$ 时, 过程就象从 $X = y$ 处开始一样; 当 $X > t$ 时, 更新还未发生。按照 $Q_1(t)$ 的定义有

$$P_r[Z > t, Q_1(t) \leq x, X > t] = \begin{cases} 0 & \text{若 } x < t(r_1 - c) \\ P_r[Z > t] & \text{若 } x \geq t(r_1 - c) \end{cases} = h_1(t, x)$$

则
$$\alpha(t, 1, x) = h_1(t, x) + \int_0^t \alpha(t - y, 1, x) dF(y)$$

当 x 固定时, $h_1(t, x)$ 是一个 t 的非负有界函数, 上式为一个典型的更新方程^[6], 其唯一解为

$$\alpha(t, 1, x) = \int_0^t h_1(t - y, x) dU(y)$$

记 $\alpha(t, 0, x) = P_r[I(t) = 0, Q_1(t) \leq x]$, 类似有

引理 2 $\alpha(t, 0, x) = \int_0^t h_2(t - y, x) dU(y)$

其中

$$h_2(t, x) = \begin{cases} 0 & x < (r_0 - c)t \\ \int_0^t \bar{G}(t - z) dH(z) & x \geq (r_1 - c)t \\ \int_0^{\frac{x - (r_0 - c)t}{r_1 - r_0}} \bar{G}(t - z) dH(z) & \text{其他} \end{cases}$$

记 $\alpha(t, x) = P_r[Q_1(t) \leq x] = \alpha(t, 1, x) + \alpha(t, 0, x)$, 得到

定理 1
$$\alpha(t, x) = \int_0^t h(t - y, x) dU(y) \tag{1}$$

其中

$$h(t, x) = h_1(t, x) + h_2(t, x) = \begin{cases} 0 & x < (r_0 - c)t \\ \bar{F}(t) & x \geq (r_1 - c)t \\ \int_0^{\frac{x - (r_0 - c)t}{r_1 - r_0}} \bar{G}(t - z) dH(z) & \text{其他} \end{cases}$$

至此, 我们已求出了 $Q_1(t)$ 的准确分布, 以下推论不加证明, 可以参见文献[6]。

推论 1) $\lim_{y \rightarrow \infty} \alpha(t, x) = \frac{1}{EX} \int_0^\infty \left[\int_0^{\frac{x-(t_0-c)y}{r_1-r_0}} \bar{G}(t-z) dH(z) \right] dt$

2) $\alpha(t, 0) = \int_0^\infty \left[\int_0^{\frac{(c-r_0)(y-t)}{r_1-r_0}} \bar{G}(t-y-z) dH(z) \right] dU(y)$

$\lim_{y \rightarrow \infty} \alpha(t, 0) = \frac{1}{EX} \int_0^\infty \left[\int_0^{\frac{(c-r_0)y}{r_1-r_0}} \bar{G}(t-z) dH(z) \right] dt$

3 Q(t)的分布

令 Q 表示在一个周期内实际输入量与理论输出量之差, 记 Q⁺ 为 Q 的正部, 假设 Q(0)=0, 有

$$Q(s_1) = Q^+ \quad Q(s_2) = [Q(s_1) + Q]^+, \dots$$

$$Q(s_{n+1}) = [Q(s_n) + Q]^+ \quad Q(t) = [Q(s_{N(t)}) + Q_1(t)]^+$$

式中 Q 与 Q(s_i) 均独立, Q₁(t) 与 Q_{s_{N(t)}} 也独立。用数学归纳法容易证明。

定理 2 设 $Q_2^+(x) = \int_{0^+}^\infty Q(x-y) dQ_1^+(y)$, $Q_{n+1}^+(x) = \int_{0^+}^\infty Q(x-y) dQ_n^+(y)$, $a_1 = 1, a_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i Q_{n+1-i}^+(0)$, $n \geq 1$, 则

$$Q_n(x) = P_r [Q(s_n) \leq x] = \sum_{i=1}^n a_i Q_{n+1-i}^+(x) \quad (x \geq 0) \tag{2}$$

$$Q_n(0) = P_r [Q(s_n) = 0] = a_{n+1}$$

推论 设 $P_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) \quad x \geq 0$, 则

$$P_1(x) = P_1(0) \sum_{n=1}^\infty Q_n^+(x) \tag{3}$$

$$P_1(0) = 1 / \left[\sum_{n=1}^\infty Q_n^+(\infty) \right]$$

证明 由定理 4 的证明可看出

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(0)Q_1^+(x) + \int_{0^+}^\infty Q(x-z) dQ_n(z)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 有

$$P_1(x) = P(0)Q_1^+(x) + \int_{0^+}^\infty Q(x-z) dP_1(z)$$

式(3)是该方程的解, 而分布函数唯一, 所以式(3)是该方程的唯一解。

定理 3 Q(t)的分布函数为

$$P_r [Q(t) \leq x] = \bar{F}(t) \alpha(t, x) + \left[\sum_{n=1}^\infty a_{n+1} (F_n(t) - F_{n+1}(t)) \right] \alpha(t, x) + \sum_{n=1}^\infty \alpha(t, x) Q_n(x) [F_n(t) - F_{n+1}(t)] \tag{4}$$

证明 $P_r [Q(t) \leq x] = P_r ([Q(s_{N(t)}) + Q_1(t)]^+ \leq x) = \sum_{n=0}^\infty P_r ([Q(s_n) + Q_1(t)]^+ \leq x) P[N(t) = n] =$

$$\alpha(t, x) \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^\infty \left[a_{n+1} \alpha(t, x) + \int_{0^+}^\infty \alpha(t, x-y) dQ_n(y) \right] (F_n(t) - F_{n+1}(t)) =$$

$$\sum_{n=0}^\infty a_{n+1} [F_n(t) - F_{n+1}(t)] \alpha(t, x) + \sum_{n=1}^\infty [Q_n(x) \alpha(t, x)] [F_n(t) - F_{n+1}(t)]$$

注意 $P_r [Q(t) \leq 0]$ 视同 $P_r [Q(t) = 0]$, 即

$$P_i[Q(t)=0] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} [F_n(t) - F_{n+1}(t)] \alpha(t,0) + \sum_{n=1}^{\infty} [Q_n(x) \alpha(t,x)]_{x=0} [F_n(t) - F_{n+1}(t)] \quad (5)$$

推论 设 $P(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i[Q(t) \leq x]$, 则

$$P(x) = P_1(0) \left[\alpha(\infty, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^+}^{\infty} \alpha(\infty, x-z) dQ_n^+(z) \right] \quad (6)$$

$$P(0) = P_1(0) \left[\alpha(\infty, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^+}^{\infty} \alpha(\infty, -z) dQ_n^+(z) \right] \quad (7)$$

证明 由于 $Q(t) = [Q(s_{N(t)}) + Q_1(t)]^+$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $N(t) \rightarrow \infty$, 故有 $Q(\infty) = [Q(s_{\infty}) + Q_1(\infty)]^+$ 。从而

$$P(x) = P_1(0) \alpha(\infty, x) + \int_{0^+}^{\infty} \alpha(\infty, x-z) dP_1(z) = P_1(0) \alpha(\infty, x) + P_1(0) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^+}^{\infty} \alpha(\infty, x-z) dQ_n^+(z) = P_1(0) \left[\alpha(\infty, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^+}^{\infty} \alpha(\infty, x-z) dQ_n^+(z) \right]$$

$$P(0) = P_1(0) \left[\alpha(\infty, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0^+}^{\infty} \alpha(\infty, -z) dQ_n^+(z) \right]$$

4 结 论

本文应用更新理论, 找到了 $Q_1(t)$ 的分布式(1), 进而得到了 $Q(t)$ 的瞬态分布式(4)及极限分布式(6), 同时给出了缓冲器容量为空的瞬态概率式(5)及极限概率式(7)。

参 考 文 献

- 1 Anick D, Mitra D, Sondhi M M. Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources. The Bell System Technical Journal 1982,61(8):1 871~1 894
- 2 Elwalid A I, Mitra D. Statistical multiplexing with loss priorities in rate-based congestion control of high-speed networks. IEEE,Transactions on Communications, 1994,42(11):2 989~3 001
- 3 Ren Qiang, Kobayashi I Hisashi. Transient solutions for the buffer behavior in statistical multiplexing. Performance Evaluation, 1995, 23:65~87
- 4 Tanaka Takeshi, Hashida On, Takahashi Yukio. Transient analysis of fluid model for ATM statistical multiplexing. Performance Evaluation, 1995, 23:145~162
- 5 Blaabjerg S φ ren, Andersson Håkan. Approximation the heterogeneous fluid queue with a birth-death fluid queue. IEEE Transactions on Communications, 1995,45(5):1 884~1 887
- 6 邓永录, 梁之舜. 随机过程及其应用. 北京: 科学出版社, 1992

Transient Analysis of Fluid Model for ATM MUX

Wu Chuanzhi Fu Shilu Yan Shangan

(Basic Department, Logistics Engineering College Chongqing 400016)

Abstract Suppose the signal input-rate for ATM is lying on a alternative renewal process (not a Marcov process) and the output-rate is invariable, this paper gives the transient solution for the buffer content using Fluid model and renewal theory. It is useful for the design and control of the ATM multiplexer.

Key words ATM multiplexer; two-state source; fluid model; transient analysis