第28卷 第2期　　电子科技大学学报　　Vol.28 No.2
1999年4月　　Journal of UEST of China　　Apr. 1999

大 q 值下马丢函数特征值的快速算法

朱　峰
（西南交通大学电气工程学院　成都　610031）

【摘要】 给出了一种大 q 值下马丢函数特征值的修正算法。上机实践表明，该方法所得结果对于谐振区高端（q 值为 650～1 000），精度能够达到 10^{-4}～10^{-5}。在谐振频域中，这一结果运用于求解大纵横比物体电磁散射问题中，能够满足工程的一般要求；文中还给出了对求解连分式的递进算法，该算法易于编程、能克服运算过程中的积累误差，具有精度高等特点。

关 键 词 马丢函数；特征值；连分式；双精度
中图分类号 TN 926

对于在谐振频域求解大纵横比（Aspect Ratio—最大线度与最小线度之比）的二维电磁散射问题，理论分析及计算机上机实践均表明，用柱波函数展开所得的 T-MATRIX 程式是不适用的。为此，利用椭柱波函数（即马丢函数以及修正马丢函数）展开也能够把散射场表达成入射场的 T-MATRIX 程式[1]，从而能够解决圆柱波函数展开存在的困难。在利用椭柱函数展开下的 T-MATRIX 程式进行实际散射场的计算时，由于谐振频域的 q 值都是比 1 大得多的数，而一般文献[2]虽有求解特征值的算法，但都是假定 q 值较小的情况下得出的；事实上大值 q（q >100）下，关于特征值的级数算法根本就不收敛。因此，有必要研究大 q 值下特征值的其他近似算法。

马丢方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+(a-2q\cos 2x)y=0 \tag{1}$$

把解的级数形式代入式（1）

$$\begin{cases} S_{e2r}(s,x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} D_{e2k}^{(2r)}\cos 2kx & \text{(2a)}\\ S_{e2r+1}(s,x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} D_{e2k+1}^{(2r+1)}\cos(2k+1)x & \text{(2b)}\\ S_{o2r}(s,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} D_{o2k}^{(2r)}\sin 2kx & \text{(2c)}\\ S_{o2r+1}(s,x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} D_{o2k+1}^{(2r+1)}\sin(2k+1)x & \text{(2d)}\end{cases}$$

式中　e、o 分别代表偶和奇的标志，$D_{e2k}^{(2r)}$，$D_{e2k+1}^{(2r+1)}$，$D_{o2k}^{(2r)}$，$D_{o2k+1}^{(2r+1)}$分别代表各自 r 阶特征值所对应的展开系数，把式(2a)~(2b)的级数形式带入式(1)，可以得到如下求解马丢函数特征值的连分方程式

$$a-\cfrac{2q^2}{a-2^2-\cfrac{q^2}{a-4^2-\cfrac{q^2}{a-6^2-\cdots}}}=0 \tag{3a}$$

$$a-1-q-\cfrac{q^2}{a-3^2-\cfrac{q^2}{a-5^2-\cfrac{q^2}{a-7^2-\cdots}}}=0 \tag{3b}$$

1998年11月14日收稿,1999年1月29日修改定稿
* 男　36岁　工学博士　副教授

$$a-4-\cfrac{q^2}{a-4^2-\cfrac{q^2}{a-6^2-\cfrac{q^2}{a-8^2-\cdots}}}=0 \tag{3c}$$

$$a-1+q-\cfrac{2q^2}{a-3^2-\cfrac{q^2}{a-5^2-\cfrac{q^2}{a-7^2-\cdots}}}=0 \tag{3d}$$

式(3a) ~ (3d)在大 q 值下，理论上直接求解特征值是非常困难的。为此，本文给出一种计算特征值的近似方法；同时，本文还给出了对该方法的检验手段。

1　修正公式的提出

当 q 值很大时，按文献[3]给出的公式对于 q 值在谐振区高端(q 值为 650～1 000)。使用式(3a)~（3d）时，通过上机验证，我们发现对 a_{2r} 以及 a_{2r+1} 项的相对误差较大。严格理论表明，特征值是唯一的，且满足[4]

$$a_0<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_{2r}<b_{2r}<a_{2r+1}<b_{2r+1}<\cdots \tag{4}$$

按照式(4)，a_r 与 b_r 是严格分开的。因此，通过上机探索实践，我们发现，a_r 取值的误差主要体现在 0.001 与 0.000 1 数位上，故只需对式（4）中对 a_r 项的第四项和第五项分别采用加权 w 的一次项和二次项的方法，得到如下的经验修正公式

$$\begin{aligned}a_r=&-2q+2w\sqrt{q}-(w^2+1)\cdot 2^{-3}-w(w^2+3)\cdot 2^{-7}q^{-\frac{1}{2}}-\\&(5w^4+34w^2+394w+9)\cdot 2^{-12}q^{-1}-\\&w(33w^4+410w^2+4\,230w+405)\cdot 2^{-17}q^{-\frac{3}{2}}-\\&(63w^6+1\,260w^4+2\,943w^2+486)\cdot 2^{-20}q^{-2}-\\&w(527w^6+15\ 617w^4+69\ 001w^2+41\,607)\cdot 2^{-25}q^{-\frac{5}{2}}-\\&(9\,387w^8+388\ 780w^6+2\,845\,898w^4+4\,021\,884w^2+506\,979)\cdot 2^{-31}q^{-3}-\\&w(175\,045w^8+9\,702\,612w^6+107\,779\,416w^4+\\&287\,224\,296w^2+120\,298\,137)\cdot 2^{-37}q^{-\frac{7}{2}}+O(q^{-4})\\&w=2r+1,\qquad r=0,1,2,\cdots\end{aligned} \tag{5}$$

通过上机验证，r 取值在 0～15 范围内（这足以满足一般工程需要），能够使所求得的特征值的误差限制在 $10^{-4}\sim 10^{-5}$ 范围以内。

2　对修正公式的验证

将式(5)代入式(3a)~(3d)进行上机验证时，逐项求商运算由于计算机对小数位的截取会带来误差，特别是对连分式项数的数目较大时，逐项求商运算的结果是不可靠的，因此我们采用高等代数中的求解连分式的累加运算方法。其具体验证步骤如下：在式(3a)和式(3b)中，令

$$f(a_{2r},\ N)=a-\cfrac{2q^2}{a-2^2-\cfrac{q^2}{a-4^2-\cfrac{q^2}{a-6^2-\cdots\cfrac{q^2}{a-[2(N-1)]^2}}}} \tag{6a}$$

$$f(a_{2r+1},\ N)=a-1-q-\cfrac{q^2}{a-3^2-\cfrac{q^2}{a-5^2-\cfrac{q^2}{a-7^2-\cdots\cfrac{q^2}{a-(2N-1)^2}}}} \tag{6b}$$

对于式(6a)、(6b)的连分式，利用

$$\begin{bmatrix}p_n\\q_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{n-1},p_{n-2}\\q_{n-1},q_{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_n\\a_n\end{bmatrix} \tag{7}$$

式中 b_n 和 a_n 分别为第 N 项的分母和分子，例如，对于式(6b)，$b_1=1$，$b_2=a^2-3^2$，$b_3=a^2-5^2\cdots$；$a_1=a-1-q$，$a_2=q^2$，$a_3=q^2\cdots$。

p_n 和 q_n 分别为取前 N 项时的整个连分式的分子和分母，例如，对于式(6b)，$q_1=1$，$p_1=a-1-q$，对于 p_2 和 q_2，由

$$\frac{a-1-q}{1}-\frac{q^2}{a-3^2}=\frac{(a-1-q)(a-3^2)-1\cdot q^2}{1\cdot(a-3^2)}=\frac{a^2-(1+q+9)a+9(1+q)}{a-9}$$

由上式，得 $p_2=a^2-(1+q+9)a+9(1+q)$，$q_2=a-9$。知道了连分式的前二项以后，利用式（7）即可求出 p_3 项和 q_3 项。依次类推，使用式（7）求解连分式的优点在于：1）便于计算机编程；2）不需要进行中间求商运算，这样就能够避免中间运算环节的数值截断的累积所产生的积累误差。

从严格意义上来讲，将式(5)代入，应该使式（6a）、(6b）为零。由于特征值是近似值，故式（7）并不为零，因此，近似求解所得的特征值越接近于真值，式（6a）、(6b）越接近于零，表 1 为采用式（6a）、(6b）的修正表达式与采用文献[3]的原表达式的比较。在具体上机验证时，我们发现，对于谐振区高端（q 值为 650～1 000），不论 a_r 或 b_r，N 的取值大于 28 时就已经稳定，故在得出表 1 或表 2 的数值结果时，一律取 N=30。使用 FORTRAN 运算时，为提高运算精度，一律采用的是双精度（double precision）运算。

表 1 由文献[3]的方法所对应的 a_r 值列表（N=30）

q 取值	600	700	800	900	1 000
a_0	−1 151.261 50	−1 347.336 17	−1 543.682 58	−1 740.251 05	−1 937.005 45
a_1	−1 054.292 40	−1 242.515 81	−1 431.554 54	−1 621.259 58	−1 811.522 42
a_2	−958.347 39	−1 138.717 67	−1 320.447 23	−1 503.287 59	−1 687.057 83
a_3	−863.443 49	−1 035.957 38	−1 210.375 17	−1 386.348 71	−1 563.624 57
a_4	−769.598 73	−934.251 42	−1 101.353 62	−1 270.457 21	−1 441.236 06
a_5	−676.832 20	−833.617 15	−993.398 58	−1 155.628 01	−1 319.906 33
a_6	−585.164 16	−734.072 92	−886.526 92	−1 041.876 77	−1 199.650 03

表 2 用本文的方法修正后的 a_r 值列表（N=30）

q 取值	600	700	800	900	1000
a_0	−1 151.261 66	−1 347.336 31	−1543.682 70	−1 740.251 16	−1 937.005 54
a_1	−1 054.292 90	−1 242.516 24	−1 431.554 92	−1 621.259 91	−1 811.522 71
a_2	−958.348 24	−1 138.718 40	−1 320.447 87	−1 503.288 15	−1 687.058 34
a_3	−863.444 72	−1 035.958 43	−1 210.376 08	−1 386.349 52	−1 563.625 30
a_4	−769.600 35	−934.252 80	−1 101.354 82	−1 270.458 27	−1 441.237 01
a_5	−676.834 23	−833.618 88	−993.400 08	−1 155.629 33	−1 319.907 51
a_6	−585.166 62	−734.075 00	−886.528 72	−1 041.878 36	−1 199.651 45

表 3　修正前后 a_r 值所对应式（6a）、（6b）的比较列表（N=30）

Q 取值	600	700	800	900	1 000
$f(a_0,N)$ 修正前	−0.001 7	−0.001 9	−0.001 3	−0.001 5	−0.001 2
$f(a_0,N)$ 修正后	0.000 4	0.000 7	0.000 1	0.000 9	0.000 1
$f(a_1,N)$ 修正前	−0.038 2	−0.036 7	−0.035 5	−0.034 3	−0.033 9
$f(a_1,N)$ 修正后	0.000 1	0.000 6	0.000 4	0.000 2	0.000 9
$f(a_2,N)$ 修正前	−0.010 4	−0.009 2	−0.008 4	−0.008 2	−0.007 0
$f(a_2,N)$ 修正后	0.000 2	0.000 5	0.000 6	0.000 7	0.000 9
$f(a_3,N)$ 修正前	−0.061 0	−0.05 8	−0.056 0	−0.054 0	−0.053 0
$f(a_3,N)$ 修正后	0.000 7	0.000 5	0.000 4	0.000 8	0.000 9
$f(a_4,N)$ 修正前	−0.025 3	−0.022 4	−0.020 9	−0.018 1	−0.017 5
$f(a_4,N)$ 修正后	0.000 8	0.000 7	0.000 6	0.000 2	0.000 3
$f(a_5,N)$ 修正前	−0.078 1	−0.075 5	−0.072 0	−0.070 7	−0.068 2
$f(a_5,N)$ 修正后	0.000 7	0.000 3	0.000 5	0.000 8	0.000 9
$f(a_6,N)$ 修正前	−0.044 0	−0.039 5	−0.036 7	−0.032 1	−0.030 0
$f(a_6,N)$ 修正后	0.000 1	0.000 4	0.000 9	0.000 8	0.000 6

3　结　论

本文在文献[3]的基础上，针对 a_r 给出一种修正算法。上机实践表明，用本文给出的方法所得结果对于谐振区高端（q 值为 650～1 000）所得特征值能够达到的精确度为 0.000 1～0.000 01，从而能满足工程的一般要求；同时，本文还给出了上机检验特征值的具体实现步骤。

参 考 文 献

1　朱 峰,盛克敏,任朗.用于大纵横比物体二维电磁散射问题的推广 T－MATRIX 方法.电波科学学报, 1997,12(2):169～175

2　Toyama N, Shogen K. Computation of the even and odd Mathieu functions.IEEE Trans and Propagation AP, 1984,32(6): 537~539

3　Wang W. Higer order terms of asympotic expansions for spheroidal eigenvalues. Quart Appl, Math SLV, 1989, 2(3): 539~543

4　National Bureau of Standard. Table relating to Mathieu functions, charactic values, coefficeents, and joining factors. Columbia:Columbia University Press , 1967

A Fast Computation for Mathieu Characteristic Value with Large q

Zhu　Feng

(Dept. of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University　Chengdu　610031)

Abstract　In this paper, an approximate algorithm is proposed for the Mathieu characteristic value .The precision of the improvement method can satisfy general engineering requirement in dealing with the T - MATRIX method to determine large aspect ratio scattering problem of resonant mode(q: 650~1 000).To get high accuracy in verifying the mentioned above, this paper also put forward a recurrence method tackling continue fraction.

Key words　Mathieu function;　characteristic value;　continued fraction;　double precision