

并联机器人的奇异形位分析

华为实*

(四川轻化工学院电子工程系 四川 自贡 643033)

【摘要】 讨论了并联机器人奇异形位的特点和分析方法,利用 plücker 坐标矩阵法对 DELTA 机器人的奇异形位进行了分析,提出了对并联机构进行受力分析来确定奇异形位的简便方法。

关键词 并联机器人; 奇异形位; Plücker 坐标矩阵; 受力分析

中图分类号 TP242.3

串联机器人的奇异形位分析,对机器人的控制和轨迹规划是十分重要的。当操作臂处于奇异形位时,逆雅可比 J^{-1} 不存在,速度反解可能不存在。并且在奇异点附近,雅可比矩阵 J 是病态的,反解的关节速度矢量可能趋于无限大,操作臂的运动性能和动态性能变坏^[1]。因此,有必要避开这些奇异点。

并联机器人和串并联机器人相比具有刚性好、负载能力强、位置精度高等特点,近年来在机器人研究领域受到了人们的重视。并联机器人的奇异形位分析同样是一个重要的问题。它和串并联机器人的奇异形位有相似之处,但又有不同的地方。本文介绍了并联机器人的奇异形位的特点和处理方法,并提出了一种根据并联机构的受力分析来决定其奇异形位的方法,这种方法在应用上是比较方便和直观的。

1 并联机器人操作机的奇异形位

关于串联机器人的奇异形位,其定义是,若 q 表示操作臂的第 n 个关节变量构成的 n 维关节矢量,则对于关节空间的某些形位 q ,操作臂的雅可比矩阵 $J(q)$ 的秩减少,这些形位称为操作臂的奇异形位。在奇异形位处,机器人在操作空间的自由度将减少。可利用雅可比矩阵的行列式为 0,即

$$\det |J(q)| = 0$$

来判别奇异形位。

并联机器人机构的奇异形位,在有关的文献上并未见到统一的严格定义,通常认为,若在某个空间位置上,并联机器人机构的自由度增加,这时机构各关节的位置称为奇异形位。在奇异形位上,

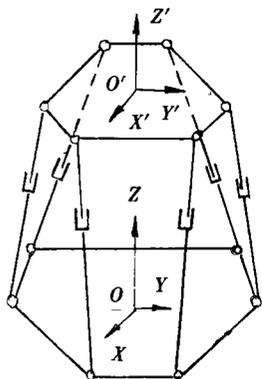


图 1 Stewart 机器人的结构简图

机器人将获得额外的一个或多个自由度,即使机构的驱动器并不动作,机器人的运动平台也具有在某些方向上的运动可能^[2]。值得注意的是,串联机器人和并联机器人在奇异形位处的表现有所不同,前者的自由度将减少,而后者的自由度将增加。在奇异形位处,并联机器人机构将变得不稳定,因此在设计其末端执行器的运动路径时,应当避开这些奇异点。

我们以著名的 Stewart 机器人为例^[3],它由 6 个可变长度的杆件把两个平台连接起来,杆件和平台之间用球铰连接,见图 1。若只考虑运动平台位于基座平台上方的情况,则此机构共有 8 个奇异形位,考查其中的两个。在图 2a 中,如果使运动平台沿一个方向绕 Z 轴旋转 90° ,同时保持运动

1998 年 10 月 15 日收稿,1998 年 11 月 24 日修改定稿

* 男 52 岁 硕士 副教授

平台和基座平台平行，这样就得到一个奇异形位。在这个位置上运动平台获得了一个附加的自由度，即关于 Z 轴的螺旋运动。这时，如果运动平台受到一个沿 Z 轴的外力的作用，尽管 6 个杆件的长度并未改变，运动平台仍将作一微小的螺旋运动。又如，在图 2 b 中，若运动平台平面 $P_{12}P_{34}P_{56}$ 绕 Y 轴旋转到与三角形 $P_{34}B_3B_4$ 共面的位置，这又是一个奇异形位。在这个位置上，运动平台将获得一个附加的自由度，即绕轴 $P_{12}P_{56}$ 的旋转，运动平台抵抗绕该轴旋转的刚度将降低。

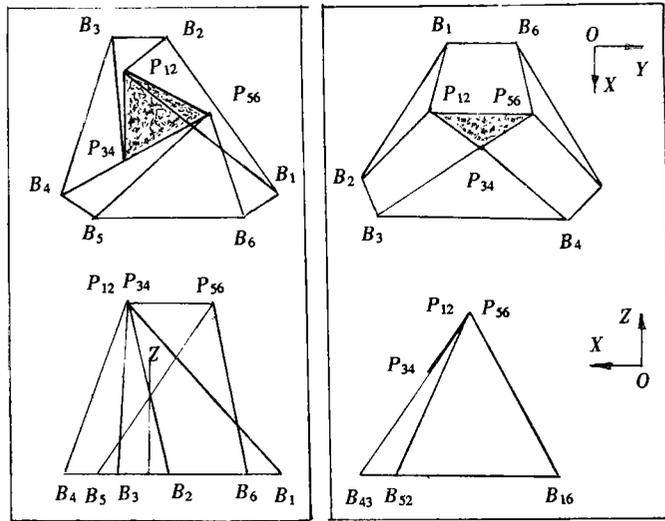


图 2 Stewart 机器人的奇异形位

2 奇异形位的判定

并联机器人机构的奇异形位也可以采用类似于串联机器人的情况来加以判定。一种方法是令并联机构的雅可比矩阵的行列式为 0，则可求出相应的奇异形位。另一种方法是利用 Plücker 坐标矩阵的行列式为 0 来求奇异形位。前一种方法使用起来并不容易，相比之下后一种方法用起来更方便。

这里我们着重讨论后一种方法。为了在直角坐标系 XYZ 中表示一个矢量 $\overline{P_1P_2}$ 的位置，可以采用矢量的 Plücker 坐标表示

$$[l, m, n, P, Q, R]$$

此处 l, m, n 分别表示该矢量的方向余弦， P, Q, R 表示该矢量关于 X, Y, Z 轴的矩。如果某机构有 6 个力矢量需要考虑，则可将此 6 个矢量的 Plücker 坐标组成一个 6×6 的 Plücker 坐标矩阵

$$D = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & P_1 & Q_1 & R_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & P_2 & Q_2 & R_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_6 & m_6 & n_6 & P_6 & Q_6 & R_6 \end{bmatrix}$$

若此坐标矩阵的行列式为零，即这组力矢量线性相关，就可得到对应的奇异形位。这时矩阵 D 是一个降秩矩阵，其秩降数就等于机器人在此奇异点的自由度的增加数。

作为应用 Plücker 坐标矩阵法来判定并联机器人奇异形位的例子，我们分析了 DELTA 机器人的奇异形位。这种并联机器人机构由三条完全相同的运动链，将上下两个三角形平台连接起来，上平台为基座，下平台为运动平台。每条运动链中有一个由四个球铰与杆件组成的平行四边形闭环，此闭环再与一个带转动关节的驱动臂相串联，如图 3 所示^[4]。运动平台具有三个自由度，可在直角坐标空间沿 X, Y, Z 三个方向平移运动，运动中上下两个平台始终保持平行。DELTA 机构共有四个奇异形位，如图 4 所示。分析以图 4a 中的奇异形位 1 为

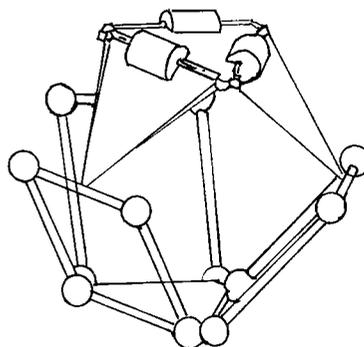


图 3 DELTA 机器人结构简图

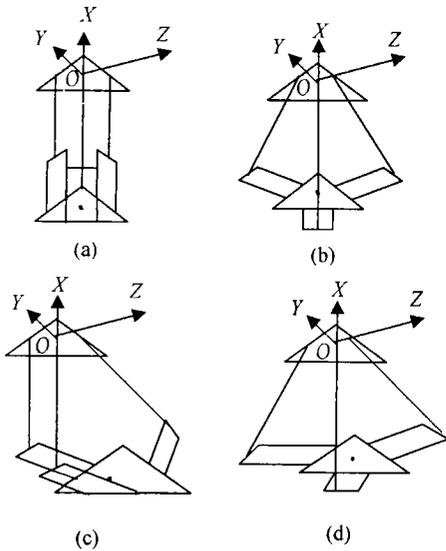
例：该形位的结构特点是 3 条运动链中的 6 个杆件全部平行。因为施加在运动平台上的 6 个力的作用线沿 6 个杆件的轴线方向，互相平行，因此，这 6 个力矢量在图 4a 中所示的直角坐标系中的方向余弦完全相同，设为 l 、 m 、及 n 。此 6 个力矢量平行于 Z 轴，故对 Z 轴的矩为 0。它们关于 X 轴与 Y 轴的矩分别表示为 $P_1 \sim P_6$ 及 $Q_1 \sim Q_6$ 。这样就得到一个 Plücker 坐标矩阵

$$D = \begin{bmatrix} l & m & n & P_1 & Q_1 & 0 \\ l & m & n & P_2 & Q_2 & 0 \\ l & m & n & P_3 & Q_3 & 0 \\ l & m & n & P_4 & Q_4 & 0 \\ l & m & n & P_5 & Q_5 & 0 \\ l & m & n & P_6 & Q_6 & 0 \end{bmatrix}$$

显然，这个矩阵的行列式为零，该位置是 DELTA 机器人机构的一个奇异形位。同时，此 6 阶矩阵的秩为 3，秩降数为 3，按 Plücker 坐标矩阵法，并联机构在此获得了 3 个附加的自由度，即运动平台平行于 X 轴和 Y 轴的平移运动以及关于 Z 轴的旋转运动。

在图 4b 所示的位置上，6 个杆件共面，每对平行杆件作用力的方向余弦相同，设 T 为与各作用力对 X 、 Y 轴的转矩有关的常数， R 为各力对 Z 轴的矩，于是可得一个 Plücker 坐标矩阵

$$D = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 & Tm_1 & -Tl_1 & R \\ l_1 & m_1 & 0 & Tm_1 & -Tl_1 & -R \\ l_2 & m_2 & 0 & Tm_2 & -Tl_2 & R \\ l_2 & m_2 & 0 & Tm_2 & -Tl_2 & -R \\ l_3 & m_3 & 0 & Tm_3 & -Tl_3 & R \\ l_3 & m_3 & 0 & Tm_3 & -Tl_3 & -R \end{bmatrix}$$



显然，此 6 阶矩阵的行列式为零，位置也对应一个奇异形位。此矩阵的秩为 3，秩降数为 3，并联机构将增加 3 个自由度，即运动平台沿 Z 轴的平移运动及绕 X 轴和 Y 轴的旋转运动。利用与上述相同的方法，我们可以对图 4 中另外两种奇异形位加以分析，结果如下：奇异形位 3：4 个杆件平行：在这个位置运动平台得到 1 个自由度，即垂直于 4 个平行杆件的平移运动。奇异形位 4：4 个杆件共面：在这个位置运动平台得到 1 个自由度，即绕连接两个非共面杆件球铰的轴线的旋转运动。

3 利用受力分析判定奇异形位

为了更清楚地了解并联机器人机构奇异形位的实质，我们对一些种类的并联机器人的奇异形位进行了分析和比较。我们看到，尽管这些机器人有不同的具体结构，但它们的奇异形位的数量只有有限的数种，并且都发生在一些特殊的位置上，诸如若干杆件平行或共面等情况，也可以比较容易地找出这些位置。这样，并联机器人奇异形位的判定可以先考查该机器人的所有各特殊位置，并通过对这些位置上的运动平台的受力分析来确定其是否为奇异形位，以及它们增加的自由度数。如果在某

图 4 DELTA 机器人的奇异形位

个位置上, 并联机器人运动平台暂时失去了对一些方向的运动的约束, 该位置就对应机器人的一个奇异形位, 失去的约束数就是在该位置自由度的增加数。

我们仍以 DELTA 机器人为例, 这里只需考虑连接到运动平台上的 6 根杆件, 由它们对运动平台所施的作用力来判定某位置是否属于奇异形位。各杆件的两端均是球铰连接, 假定球铰是理想的, 各杆件上的作用力只能沿杆件的轴线方向, 一般情况下这 6 个力分为 3 组两两平行力, 这 3 组力互不平行, 且不共面, 这时若在运动平台上施以一个干扰力, 则 6 个杆件上的作用力将自动调整其大小来和干扰力相平衡, 使运动平台保持静止。这种情况属于非奇异形位。在图 4a 所示的位置, 情况就不一样了。6 个杆件上的力是沿 Z 轴正方向的同向平行力, 与运动平台的重力保持平衡, 这时若在运动平台上施以平行于 X 轴或 Y 轴方向的外力或关于 Z 轴的转矩, 6 个杆件上的力将无法自行调整以和这些外力或力矩保持平衡, 运动平台有沿这些方向的运动倾向。因此图 4a 所示的位置是一个奇异形位, DELTA 机构在此处增加了 3 个自由度。对于图 4b~4d 的奇异形位, 可以类似地通过受力分析加以确定。对 Stewart 机器人及其他一些并联机器人机构, 这种方法也是有效的。

利用受力分析法来分析并联机构的奇异形位, 可以得到和 Plücker 坐标矩阵法同样的结果。实际上这两种方法本质上是一致的。比如, 在 DELTA 机器人机构的某位置, 若用受力分析法判定为非奇异形位, 即运动平台 6 个杆件上的力为 3 组两两平行力, 这 3 组力互不平行, 且不共面, 这时 6 个杆件力的 Plücker 坐标是线性独立的, Plücker 坐标矩阵为满秩矩阵, 其行列式不等于零。而用受力分析法判定为奇异形位的位置, 6 杆件上的力的 Plücker 坐标将是线性相关的, Plücker 坐标矩阵是降秩矩阵。

4 结束语

对于并联机器人的奇异形位, 随着自由度的增加, 其机构将变得不稳定, 因此有必要确定这些奇异形位, 并在规划末端执行器的轨迹时将其避开, 利用 Plücker 坐标矩阵法可达到这一目的。本文提出的受力分析方法也是一种简便和有效的方法, 同时, 有利于更好理解并联机器人机构奇异形位的实质。

参 考 文 献

- 1 熊有伦. 机器人技术基础. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996: 55~63
- 2 Charentus S, Renaud M. Modelling and control of a modular, redundant robot manipulator. LAAS REPORT, 1989. 89 255: 1~12
- 3 Stewart D. A platform with six degrees of freedom. Proc IME, 1965, 180(15): 371~378
- 4 Clacel R. DELTA, a fast Robot with parallel geometry. Proc Int Symposium on Industriel Robots, 1988: 91~100

Analysis of Singularities of Parallel Robot

Hua Weishi

(Dept. of Electr. Eng., Sichuan Institute of Light Ind. & Chem. Tech. Sicnuan Zigong 643033)

Abstract The characteristics and the analytical methods of the singular position of a parallel robot are discussed in this paper. A singularity analysis of the Plücker coordinate matrix to the DELTA robot is presented. A simple way of using the force analysis to a parallel robot mechanism to determine its singular positions is put forward.

Key words parallel robot; singular position; Plücker coordinate matrix; force analysis