第 28 卷 第 2 期 电子科技大学学报 Vol.28 No.2
1999 年 4 月 Journal of UEST of China Apr. 1999

反馈型 CNN 解的稳定性*

王 毅** 黄元清

（电子科技大学应用数学系 成都 610051）（四川轻化工学院电子工程系 自贡 643033）

【摘要】 研究了具有时滞的反馈型细胞神经网络，利用李雅普诺夫函数、常数变易法以及不等式分析技巧，证明了具有时滞的反馈型细胞神经网络的解的有界性，同时给出了任意解全局指数稳定和渐近稳定的充分条件。

关 键 词 细胞神经网络； 时滞； 李雅普诺夫函数； 稳定性

中图分类号 O231

自 L.O.Chua 提出细胞神经网络理论与应用以来，由于其巨大的应用前景，已成为多门学科研究的热点，P.P.Civalleri 等人指出[1~5]，对于具有时滞的反馈型细胞神经网络(DCNN)，虽然在参数矩阵为对称矩阵且无时滞时，系统是稳定的，但适当选择时滞时，可使 DCNN 不稳定，同时 P.P.Civalleri 也给出了在参数矩阵是对称矩阵时，DCNN 稳定的充分条件。对于多层 CNN 网络间的相互连接，H.Harrer 给出了三种基本层间的连接形式[6]，即并联型、串联型和反馈型，因此，要研究多层 CNN 网络的性质，有必要研究这些基本连接形式的性质。文献[7,8]研究了具有时滞的反馈型细胞神经网络，给出了一些稳定性条件。本文研究具有时滞的反馈型细胞神经网络的状态变量的有界性和任意解的稳定性问题，给出了具有时滞的反馈型细胞神经网络解稳定性的充分条件。

1 系统的描述

文献[7]已经引入了具有时滞的反馈型细胞神经网络，并给出了稳定性的充分条件，本文考虑如下具有时滞的反馈型细胞神经网络的状态方程为

$$C\frac{\mathrm{d}v_{x,ij}^{(m)}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{R}v_{x,ij}^{(m)}(t)+\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}A_m(i,j,k,l)v_{y,kl}^{(m)}(t)+\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}A_m^r(i,j,k,l)v_{y,kl}^{(m)}(t-\tau)+$$
$$\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}B_m(i,j,k,l)v_{u,kl}^{(m)}(t)+\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}B_m^r(i,j,k,l)v_{u,kl}^{(m)}(t-\tau)+I_{ij}^{(m)}(t)$$
$$1\le i\le M,\quad 1\le j\le N,\quad 1\le m\le 2 \tag{1}$$

输出方程为

$$v_{y,ij}^{(m)}(t)=f(v_{x,ij}^{(m)})\qquad 1\le i\le M,\quad 1\le j\le N,\quad 1\le m\le 2 \tag{2}$$

式中
$$f(v)=\frac{1}{2}(|v+1|-|v-1|)$$

输入方程为反馈型，即

$$v_{u,ij}^{(1)}=v_{y,ij}^{(2)}\qquad v_{u,ij}^{(2)}=v_{y,ij}^{(1)}\qquad 1\le i\le M,\quad 1\le j\le N \tag{3}$$

而 $I_{ij}^{(m)}(t)$ 是有界连续函数，且

$$\left|I_{ij}^{(m)}(t)\right|\le l\qquad 1\le i\le M,\quad 1\le j\le N,\quad 1\le m\le 2 \tag{4}$$

式中 l 为常数，系统(1)中各种符号参数的物理意义见文献[1，5]。

设具有时滞的反馈型细胞神经网络(1)的初始条件为

$$v_{x,ij}^{(m)}(t)=\varphi_{ij}^{(m)}(t)\qquad t_0-\tau\le t\le t_0,\ 1\le i\le M,\ 1\le j\le N,\ 1\le m\le 2 \tag{5}$$

式中 $\varphi_{ij}^{(m)}(t)$ 是有界连续函数，并设

1999 年 1 月 26 日收稿

* 国家自然科学基金资助项目，基金号:69871005

** 女 40 岁 硕士 讲师

$$\varphi = \max_{i,j,m}\{\sup_{-\tau\le\theta\le 0}\left|\varphi_{ij}^{(m)}(t_0+\theta)\right|\} \tag{6}$$

为了表示法简单，我们将表示法作一变换，令

$$x_{(i-1)N+j} = v_{x,ij}^{(1)}, \qquad x_{MN+(i-1)N+j} = v_{x,ij}^{(2)},$$
$$f(x_{(i-1)N+j}) = v_{y,ij}^{(1)}, \qquad f(x_{MN+(i-1)N+j}) = v_{y,ij}^{(2)},$$
$$l_{(i-1)N+j}(t) = I_{ij}^{(1)}(t), \qquad l_{MN+(i-1)N+j}(t) = I_{ij}^{(2)}(t),$$
$$a_{(i-1)N+k,(j-1)N+l} = A_1(i,k,j,l) + B_2(i,k,j,l),$$
$$a_{MN+(i-1)N+k,MN+(j-1)N+l} = A_2(i,k,j,l) + B_1(i,k,j,l),$$
$$\alpha_{(i-1N+k,(j-1)N+l} = A_1^r(i,k,j,l) + B_2^r(i,k,j,l),$$
$$\alpha_{MN+(i-1)N+k,MN+(j-1)N+l} = A_2^r(i,k,j,l) + B_1^r(i,k,j,l),$$

则系统(1)变为

$$C\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}x_i + \sum_{j=1}^{2MN}[a_{ij}f(x_j(t)) + \alpha_{ij}f(x_j(t-\tau))] + l_i(t) \qquad i = 1,2,\cdots,2MN \tag{7}$$

2 具有时滞的反馈型细胞神经网络解的有界性

定理 1 系统(7)的解是有界的。

证明 利用常数变易法，有

$$x_i(t) = x_i(t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right)\left[\sum_{j=1}^{2MN}(a_{ij}f(x_j(s)) + \alpha_{ij}f(x_j(s-\tau)) + l_i(s)\mathrm{d}s\right]$$

两边取绝对值，有

$$|x_i(t)| \le |x_i(t_0)|\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right)\left[\sum_{j=1}^{2MN}(|a_{ij}||f(x_j(s))| + |a_{ij}||f(x_j(s-\tau))||l_i(s)|\right]\mathrm{d}s \le +$$
$$\varphi + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right)\left[\sum_{j=1}^{2MN}(|a_{ij}| + |\alpha_{ij}|) + l\right]\mathrm{d}s \le \varphi + R\left[\sum_{j=1}^{2MN}(|a_{ij}| + |\alpha_{ij}| + l)\right]$$

故取 $M = \max\limits_{1\le i\le 2MN}\left\{\varphi + R\left[\sum_{j=1}^{2MN}\left(|a_{ij}| + |\alpha_{ij}| + l\right)\right]\right\}$，即有

$$|x_i(t)| \le M \qquad i = 1,2,\cdots,2MN$$

3 具有时滞的反馈型细胞神经网络的稳定性

下面研究系统(7)的任一解的稳定性问题，设 $x_i(t) = x_i^*(t)$ 是系统(7)的解，则系统(7)可转化为

$$C\frac{\mathrm{d}[x_i(t) - x_i^*(t)]}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}[x_i(t) - x_i^*(t)] + \sum_{j=1}^{2MN}[a_{ij}(f(x_j(t)) - f(x_j^*(t))) +$$
$$\alpha_{ij}(f(x_j(t-\tau)) - f(x_j^*(t-\tau)))] \qquad i = 1,2,\cdots,2MN \tag{8}$$

定理 2 对于系统(7)，如果对一切 $i = 1,2,\cdots,2MN$ 满足 $\sum_{j=1}^{2MN}(|a_{ij}| + |\alpha_{ij}|) < \frac{1}{R}$，则系统(7)的解 $x = x^*(t)$ 是全局指数稳定的。

证明 令 $z_i(t) = x_i(t) - x_i^*(t) \qquad i = 1,2,\cdots,2MN$

则系统(8)变为

$$C\frac{\mathrm{d}z_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}z_i(t) + \sum_{j=1}^{2MN}[a_{ij}(f(z_j(t) + x_j^*(t)) - f(x_j^*(t))) + \alpha_{ij}(f(z_j(t-\tau) + x_j^*(t-\tau)) - f(x_j^*(t-\tau)))]$$
$$i = 1,2,\cdots,2MN$$

利用常数变易法，有

$$z_i(t)=z_i(t_0)\exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right)\left\{\sum_{j=1}^{2MN}a_{ij}[f(z_j(s)+x_j^*(s))-f(x_j^*(s))]+\right.$$

$$\left.\alpha_{ij}[f(z_i(s-\tau)+x_j^*(s-\tau))-f(x_j^*(s-\tau))\right\}\mathrm{d}s$$

两边取绝对值，有

$$|z_i(t)|\le|z_i(t_0)|\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)+\sum_{j=1}^{2MN}\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t-s}{RC}\right)\Big[|a_{ij}||f(z_j(s)+x_j^*(s))-f(x_j^*(s))|+$$

$$|\alpha_{ij}||f(z_j(s-\tau)+x_j^*(s-\tau))-f(x_j^*(s-\tau))|\Big]\mathrm{d}s$$

由 $f(\cdot)$ 的定义，可知

$$|f(z_j(t)+x_j^*(t))-f(x_j^*(t))|\le|z_j(t)|\qquad j=1,2,\cdots,2MN$$

则有

$$|z_i(t)|\le|z_i(t_0)|\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)+\sum_{j=1}^{2MN}\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right)\Big[|a_{ij}||z_j(s)|+|\alpha_{ij}||z_j(s-\tau)|\Big]\mathrm{d}s$$

注意到

$$|z_i(t)|=|x_i(t)-x_i^*(t)|\le\varphi+|x_i^*(t)|\le 2\varphi\qquad(t\in[t_0-\tau,t_0])\qquad i=1,2,\cdots,2MN$$

令
$$p_i(t)=\begin{cases}2\varphi\exp\left(-\dfrac{t-t_0}{RC}\right)+\displaystyle\sum_{j=1}^{2MN}\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right)\Big[|a_{ij}||z_j(s)|+|\alpha_{ij}||z_j(s-\tau)|\Big]\mathrm{d}s & t\ge t_0\\ 2\varphi\qquad t_0-\tau\le t\le t_0\end{cases}$$

易知　$|z_i(t)|\le p_i(t)\quad i=1,2,\cdots,2MN$，$t\ge t_0-\tau$，对 $p_i(t)$ 两边求导，有

$$p_i'(t)\le-\frac{1}{RC}p_i(t)+\sum_{j=1}^{2MN}\frac{1}{C}\Big[|a_{ij}|p_j(t)+|\alpha_{ij}|p_j(t-\tau)\Big]\le -\frac{1}{RC}p_i(t)+\sum_{j=1}^{2MN}\frac{1}{C}\left[|a_{ij}|p_j(t)+|\alpha_{ij}|\sup_{-\tau\le\theta\le 0}p_j(t+\theta)\right]$$

由条件可知，存在充分小的 $\varepsilon>0$，使

$$-\frac{1}{R}+C\varepsilon+\sum_{j=1}^{2MN}(|a_{ij}|+|\alpha_{ij}|\exp(\varepsilon\tau))<0\qquad i=1,2,\cdots,2MN\tag{9}$$

再令　$$S_i(t)=p_i(t)\exp(\varepsilon(t-t_0+\tau))\qquad t\ge t_0-\tau,\ i=1,2,\cdots,2MN$$

函数 $S_i(t)$ 对 t 求导，有

$$S_i'(t)\le\varepsilon S_i(t)+p_i'(t)\exp[\varepsilon(t-t_0+\tau)]\le\left(\varepsilon-\frac{1}{RC}\right)S_i(t)+\frac{1}{C}\sum_{j=1}^{2MN}\left[|a_{ij}|S_j(t)+|\alpha_{ij}|\exp(\varepsilon\tau)\sup_{-\tau\le\theta\le 0}S_j(t+\theta)\right]\tag{10}$$

下面证明，对任意 $d>1$，有

$$S_i(t)<2d\exp(\varepsilon\tau)\varphi\qquad i=1,2,\cdots,2MN\tag{11}$$

对一切 $t\ge t_0-\tau$ 成立，由于当 $t\in[t_0-\tau,t_0]$ 时，有

$$S_i(t)=p_i(t)\exp[\varepsilon(t-t_0+\tau)]\le p_i(t)\exp(\varepsilon\tau)=2\varphi\exp(\varepsilon\tau)<2d\exp(\varepsilon\tau)\varphi\qquad i=1,2,\cdots,2MN$$

利用反证法，假设式(11)不能永远成立，故必存在某个 i_0 及 $t_1>t_0$，使

$$S_{i_0}(t_1)=2d\exp(\varepsilon\tau)\varphi\qquad S_{i_0}(t)<2d\exp(\varepsilon\tau)\varphi\qquad t_0\le t<t_1$$

$$S_j(t)\le 2d\exp(\varepsilon\tau)\varphi\qquad t_0\le t\le t_1,\ j\ne i_0,\ j=1,2,\cdots,2MN$$

由导数的定义可知，$S_{i_0}'(t)\ge 0$。另一方面，由式(9)和式(10)，有

$$S_{i_0}(t_1)\le\left(-\frac{1}{RC}+\varepsilon\right)S_{i_0}(t_1)+\frac{1}{C}\sum_{j=1}^{2MN}\left[|a_{ij}|S_j(t_1)+|\alpha_{ij}|\exp(\varepsilon\tau)\sup_{-\tau\le\theta\le 0}S_j(t_1+\theta)\right]\le$$

$$\frac{2d\exp(\varepsilon\tau)\varphi}{C}-\left[-\frac{1}{R}+C\varepsilon+\sum_{j=1}^{2MN}(|a_{ij}|+|\alpha_{ij}|\exp(\varepsilon\tau))\right]<0$$

矛盾，故式(11)成立，当$d \to 1$时，有

$$S_i(t) \le 2\exp(\varepsilon\tau)\varphi$$

从而可知

$$|z_i(t)| = |x_i(t) - x_i^*(t)| \le p_i(t) = S_i(t)\exp(-\varepsilon\tau)\exp[-\varepsilon(t-t_0)] \le 2\exp(\varepsilon\tau)\varphi\exp(-\varepsilon\tau)\exp[-\varepsilon(t-t_0)] =$$
$$2\varphi\exp[-\varepsilon(t-t_0)] \qquad i = 1,2,\cdots,2MN$$

故系统(7)的解$x = x^*(t)$是全局指数稳定的。

定理 3 对于系统(7)，若

$$\max_i\left[\sum_{j=1}^{2MN}\left(\frac{|a_{ij}|+|a_{ji}|}{2} + \frac{|\alpha_{ij}|+|\alpha_{ji}|}{2}\right)\right] < \frac{1}{R}$$

则系统(7)的解$x = x^*(t)$是全局渐近稳定的。

证明 令 $$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2MN}\left[Cz_i^2(t) + k_i\int_{t-\tau}^{t} z_i^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right]$$

式中 $k_i = \sum_{j=1}^{2MN}|\alpha_{ji}|$，$V$函数沿着系统(7)的轨迹对$t$求导，经整理可得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{2MN}\{-\frac{1}{R}z_i^2(t) + \sum_{j=1}^{2MN}[a_{ij}[f(z_j + x_j^*) - f(x_j^*)] +$$
$$\alpha_{ij}[f(z_j(t-\tau) + x_j^*(t-\tau)) - f(x_j^*(t-\tau))]\, z_i + \frac{1}{2}k_i[z_i^2(t) - z_i^2(t-\tau)]]\} \le$$
$$\sum_{j=1}^{2MN}\left[-\frac{1}{R} + \sum_{j=1}^{2MN}\left(\frac{|a_{ij}|+|a_{ji}|}{2} + \frac{|\alpha_{ij}|+|\alpha_{ji}|}{2}\right)\right] z_i^2 < 0$$

因此系统（7）的解$x = x^*(t)$是全局渐近稳定的。

参考文献

1 Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: theory. IEEE Tran, Circuits Syst, 1988, 35:1 257~1 272

2 Chua L O, Yang L. Cellular neural networks: applications. IEEE Tran, Circuits Syst, 1988, 35:1 273~1 290

3 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅰ). 中国科学(A 辑), 1994, 24(10):1 037~1 046

4 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(Ⅱ). 中国科学(A 辑)，1994,24(9): 902~910

5 Civalleri P P, Gilli M, Pandolfi L. On stability of cellular neural networks with delay. IEEE Trans Circuits Syst, 1993,40(3):157~165

6 Harrer H. Multiple layer discrete-time cellular neural networks using Time-variant templates. IEEE Trans Circuits Syst, 1993,40(3):191~199

7 Chua L O, Roska T. Cellular neural networks with nonlinear and delay-type template elements. In Proc CNNA-90, 1990:12~25

8 钟守铭. 具有时滞的细胞神经网络的稳定性. 电子学报，1997, 25(2):125~127

Stability of CNN With Feedback

Wang Yi
(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)
Huang Yuanqing
(Dept. of Electron. Eng.,　SIOLICT　Zigong　643033)

Abstract In this paper, the cellular neural networks with feedback and delay is studied. By making use of the Lyapunov function, the method variation of parameters is given combining with the trick of inequality analysis. The bounded property of the solution and the asymptotic property of solution for the cellular neural networks with feedback and delay are proved. The sufficient condition of stability of solution for cellular neural networks with feedback of delay is also discussed.

Key works　cellular neural networks;　delay;　Lyapunov function;　Stability

• 简　讯 •

关于出版建国 50 周年论文专辑的征文启事

为庆祝中华人民共和国建国五十周年，推动学校教学和科研的进一步发展，活跃全校的学术空气，提高科研、教学、管理人员的学术水平，学校拟编辑出版反映我校各学科学术水平的学术论文专辑一册。有关规定和具体办法如下：

1　专辑编辑委员会

主　任：刘盛纲
副主任：李士成、李乐民
顾　问：林为干
委　员：刘后铭、陈星弼、黄大贵、成建波、向敬成、陈天麒、龚耀寰、刘锦德、王仕璠、钟守铭、莫元龙、陆荣鑫、吴　健、李宏福、杨中海、阮颖铮、韩春林、徐安玉
主　编：刘盛纲
副主编：李士成　刘后铭、莫元龙、陆荣鑫、韩春林、徐安玉

2　征文范围

2.1 有关科研、教学、管理等自然科学方面的学术论文；科研成果、阶段性研究成果、数值结果和测试数据的处理分析报告；国内外学术动态评述等。
2.2 其他自然科学方面的论文

3　征文要求

3.1　为了展开学校各学科在国内外的学术水平，第一作者副高级以上职称的论文应不低于所在系所、中心副高以上职称总数的 40%。
3.2　国家级、部省级重点学科第一作者副高以上职称的论文数应不低于该学科副高以上职称总数的 50%。
3.3　1999 年 4 月 10 日以前各系、所、中心、处，统一回执论文题目。
3.4　1999 年 6 月 10 日前送交论文。

4　凡被录用的论文，将全文或摘要收入论文专辑。

5　稿件要求

5.1　主题突出，文字简炼，论点鲜明，数据可靠、准确。
5.2　论文格式一律按《电子科技大学学报》标准排版。
5.3　论文作者交论文时，同时交论文软盘，软件统一使用 Word 文本软件。
5.4　部省级以上基金资助的论文，必须在论文首页下面标注。
5.5　作者简介至少应有：出生年月、学历、职务、职称、专业方向等。
5.6　稿件的末尾请注明详细地址和联系电话。

6　收稿地点和联系人

地　点：主楼中 117 室学报编辑部　联 系 人：徐培红　　黄　莘　联系电话：3202308

·下　宣·