

利用最小化代价函数方法实现多窗口谱分析

喻 胜* 何丕雁 陈光禔

(电子科技大学自动化系 成都 610054)

【摘要】 利用最小化代价函数的方法推导了一种谱分析的多窗口。性能分析的结果表明，此方法与离散长球序列多窗口谱分析方法具有相当的估计偏差与方差性能。与离散长球序列多窗口相比，此方法得到的多窗口具有直观的解析表达式而无须求解矩阵的特征分解问题，因而具有较小的计算量。通过对离散白噪声与 AR 过程进行的多窗口谱分析对比实验，验证了此方法的有效性和正确性。

关键词 谱分析；多窗口；离散长球序列；频谱泄漏；偏差

中图分类号 TN911.7; O211.61

在统计序列的非参数模型谱分析方法中，由 Thomson 提出的多窗口谱分析方法近年来得到了越来越广泛地应用^[1, 2]。与传统的周期图方法相比，多窗口谱分析方法无论在处理信号的动态范围、估计方差还是分辨率等方面都具有明显的优越性^[3]。在 Thomson 的多窗口方法中，通过求解第一类弗雷得霍姆积分方程而得到的多窗口是一组离散长球序列(DPSS)，其特点是对于给定的频域分辨率 $[f - W, f + W]$ ，DPSS 窗的能量几乎全部集中在 $[-W, W]$ 主瓣内；此外，当被估计序列真实谱的本地频率特性变化很小时，估计谱 $\hat{s}(f)$ 的估计方差可以得到显著地改善，与周期图方法相比，估计方差可以减小至 $1/K$ ，这里 K 是 DPSS 的窗口数。DPSS 多窗口谱分析方法的缺点之一是窗口序列的计算量较大，DPSS 窗的获得是通过求解矩阵的特征分解问题 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 而得到的，其中 Toeplitz 矩阵 A 的元素为 $W \text{sinc}(Wk)$ ， $1 \leq k \leq N$ ， N 是离散序列长度。本文利用最小化频域泄漏代价函数而推导出的多窗口是一组正弦窗(MS)，它除具有多窗口谱分析方法的优点外，还由于窗函数形式的简洁而具有较小的计算量。本文结合仿真实验说明了 MS 多窗口谱分析方法及其性能。

1 利用最小化代价函数方法设计 MS 多窗口

设实值平稳序列 $\{x(n)\}$ ， $n=1, 2, \dots, N$ 的功率谱密度函数为 $S(f)$ 。谱的反问题是从给定的 $\{x(n)\}$ 估计其 $S(f)$ 。多窗口谱估计器具有如下形式

$$\hat{S}(f) = \sum_{l=1}^K \alpha_l \left| \sum_{n=1}^N h_l(n)x(n) \exp(-j2\pi fn) \right|^2 \quad (1)$$

式中 K 为窗口数； α_l 为估计系数， $h_l(n)$ ， $l=1, 2, \dots, K$ 是对信号所加的时域多窗口，它们满足以下两个条件：1) $\sum_{n=1}^N h_l^2(n) = \int_{-1/2}^{1/2} |H_l(f)|^2 df = 1$ ， $l=1, 2, \dots, K$ ，即各窗口具有单位能量；2) 各 $h_l(n)$ 彼此正交。

此外，从估计谱的泄漏特性考虑，各 $h_l(n)$ 还应当具有较好的能量集中特性。对于连续时间系统的情况，Papoulis 定义了如下的代价函数来表征窗函数 $w(t)$ 的泄漏特性^[4]

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_w(\omega) d\omega \quad (2)$$

式中 $S_w(\omega)$ 是 $w(t)$ 窗的功率谱密度。从惩罚函数 ω^2 的变化特性可以看出，只有当 $S_w(\omega)$ 的幅度随 $|\omega|$ 的增大而迅速减小，或 $S_w(\omega)$ 的泄漏小时代价函数才会减小。与此类似，考虑到离散系统频域的周期性，可以选择离散域惩罚函数为 $\sin^2(\pi f)$ ^[5]，由此得到多窗口代价函数为

1999年1月7日收稿, 1999年3月10日修改定稿

* 男 26岁 博士生

$$C = \sum_{l=1}^K \alpha_l \int_{-1/2}^{1/2} |H_l(f)|^2 \sin^2(\pi f) df \quad (3)$$

约束条件为

$$\sum_{l=1}^K \alpha_l \sum_{n=1}^N h_l^2(n) = \sum_{l=1}^K \alpha_l = 1$$

即可以得到一组具有很好的频域泄漏性能的多窗口序列 $h_l(n)$, $l=1, \dots, K$ 。将式(2)化为

$$C = \sum_{l=1}^K \alpha_l \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N h_l(m) h_l(n) \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2(\pi f) \exp\{-j2\pi f(m-n)\} df$$

并定义序列 $g(n)$ 的傅氏变换为 $\sin^2(\pi f)$, 可以得到

$$C = \sum_{l=1}^K \alpha_l h_l^T G h_l \quad (4)$$

式中 Toeplitz 矩阵 G 的元素 $g(i, j) = g(i-j)$ 。在约束条件(3)下解此最小值问题得到: h_l 是矩阵 G 的 K 个最大特征值所对应的特征向量 $G h_l = \lambda_l h_l$, $l=1, \dots, K$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l \geq \dots \geq \lambda_N$ 。从 $g(n)$ 的定义可得

$$g(i, j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ -1/2 & |i-j|=1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

所以不难求出矩阵 G 的特征值为 $\lambda_l = 2 \sin^2(l \pi / (2N+2))$, 并由此得到此时的最小泄漏多窗口为

$$h_l(n) = \sqrt{2/(N+1)} \sin(\pi n l / (N+1)) \quad l=1, \dots, K \quad (5)$$

式(5)即为多正弦窗口序列 MS。可以看到, $h_l(n)$ 满足多窗口谱分析的各约束条件。此时的代价函数(4)的最小值为

$$C_{MS} = \sum_{l=1}^K \alpha_l \lambda_l = 2 \sum_{l=1}^K \alpha_l \sin^2 \frac{\pi l}{2N+2} \quad (6)$$

取 $K=8$ 分别对 DPSS 与 MS 多窗口计算式(4)、(6)可以得到 $C_{DPSS}=0.0169$, $C_{MS}=0.0123$, 即在惩罚函数 $\sin^2(\pi f)$ 意义下, MS 窗的总泄漏略小于 DPSS 窗。

2 估计性能比较与计算机仿真

为了说明 MS 多窗口谱分析方法的性能, 这里分别采用 MS 与 DPSS 多窗口对白噪声序列及一个二阶 AR 平稳过程作了仿真实验, 以比较这两种估计器的估计偏差和方差性能。

2.1 白噪声的情况

考虑分别用 MS 及 DPSS 多窗口对同一实值零均值单位方差白噪声序列作多窗口谱分析。由于此时输出序列的功率谱 $S(f) = |H(f)|^2$, 所以可以对两种窗函数本身的频域性能作出对比。为使分析的简便起见, 取各估计系数 $\alpha_l = 1/K$ 。将式(1)写成

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \hat{S}_l(f) \quad (7)$$

式中 特征谱 $\hat{S}_l(f) = |\sum h_l(n) x(n) \exp\{-j2\pi f n\}|^2$ 的估计方差渐近等于输入白噪声功率谱 1。由各数据窗的正交性可知, 当被估信号为白谱时, 式(1)的估计方差近似满足

$$V[\hat{S}(f)] \approx 1/K \quad f \neq 0, 0.5 \quad (8)$$

所以, 只需取相同的窗口数, 即可保证 MS 与 DPSS 多窗口谱估计器对白噪声估计方差的相等。下面在方差相同的情况下比较两种窗口的泄漏性能。设 DPSS 多窗口的频域分辨带宽为 $2W$, 则带外

泄漏 L 可按下式计算

$$L\{\hat{S}(f)\} = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} |H_l(f)|^2 df - \int_{-W}^W |H_l(f)|^2 df \right\} = 1 - P_W \quad (9)$$

式中 $P_W = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \int_{-W}^W |H_l(f)|^2 df$ 为带外能量。

对 DPSS 多窗口

$$L_{\text{DPSS}} = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \{1 - \lambda_l\} \quad (10)$$

式中 λ_l 为离散长球序列的对应特征值，可按下式近似计算^[1]

$$\lambda_l = 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{l!} \left[\frac{8N \sin(\pi W)}{\cos^2(\pi W)} \right]^{\frac{l+1}{2}} \left[\frac{1 - \sin(\pi W)}{1 + \sin(\pi W)} \right]^N \quad (11)$$

对 MS 多窗口，将 P_w 写成

$$\frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \int_{-1/2}^{1/2} |H_l(f)|^2 B(f) df = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \mathbf{h}_l^T \mathbf{R}_B \mathbf{h}_l \quad (12)$$

式中 $B(f)$ 为宽为 $2W$ 的频域矩形窗，Toeplitz 矩阵 \mathbf{R}_B 的元素 $r_B(l) = W \text{sinc}(Wl)$, $l=1, \dots, N$ 。从式(9)、(12)即得

$$L_{\text{MS}} = 1 - \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \mathbf{h}_l^T \mathbf{R}_B \mathbf{h}_l \quad (13)$$

取 $W=0.04$, $N=100$, 并通过式(10)、(13)可以得出 $K=2, 3, \dots, 8$ 时的两种多窗口泄漏量 L 的对比曲线，如图 1 所示。图 1 结果表明，由于 DPSS 多窗口在 $[-W, W]$ 带内具有最好的能量集中特性，所以虽然它的代价函数略大于 MS 多窗口，但仍在带外具有较好的泄漏特性。但对常用的 $K=2NW-1$ 或 $K=2NW-2$ 的情况而言，两种窗口的泄漏特性相差不大，可以认为近似相同。事实上，只需绘出 MS 各窗函数曲线并与文献[1]的图 3 和图 4 比较即可看出，MS 窗与 DPSS 窗具有非常相似的频域特性。图 2 给出的是 $K=6$ 个 MS 多窗口的合成幅度曲线。从图 2 可以看出，MS 多窗口的合成频域特性与惩罚函数 $\sin^2(\pi f)$ 具有相似的包络曲线，它的旁瓣幅度虽略高于 DPSS 多窗口，但由于其每倍频程下降幅度(约-11dB)要大于 DPSS 窗，所以综合起来两者泄漏特性是近似相同的。

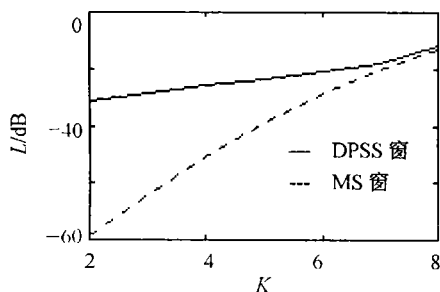


图 1 不同窗口数 K 时的谱泄漏对比

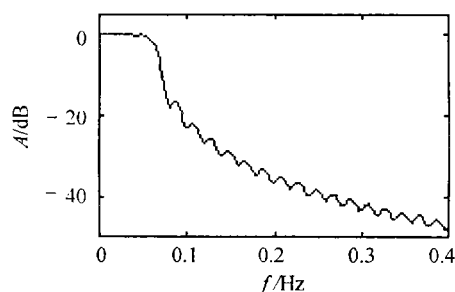


图 2 MS 多窗口函数的幅度曲线

2.2 对 AR 过程的谱分析

对二阶实值 AR 序列

$$x(n) = 1.8x(n-1) - 0.9x(n-2) + \sigma(n)$$

分别进行了 MS 与 DPSS 多窗口谱分析仿真实验，其中 $\sigma(n)$ 是一零均值、单位方差白噪声过程。序列 $x(n)$ 的真实谱在 $f=0.05$ 处有一个约 30 dB 的谱峰。这里选取了 25 段序列进行分析，每段序列长度为 $N=100$ ，DPSS 多窗口谱估计器的分辨带宽 $2W=0.08$ ；MS 与 DPSS 窗的窗口数均为 $K=2NW-2=6$ 。图 3 所示为估计功率谱 P 的实验结果曲线。下面根据这一仿真序列 $x(n)$ 分别计算两种多窗口估

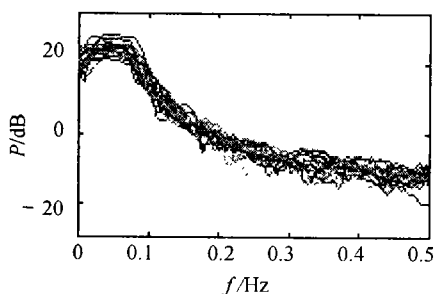


图 3 AR 过程的 25 次谱分析实验结果

计器的偏差 $B[\hat{S}(f)]$ 与估计方差 $V[\hat{S}(f)]$ 。

2.2.1 估计偏差

首先对多窗口谱分析的估计偏差 $B[\hat{S}(f)]$ 进行分析。这里我们将连续时间系统的情况推广至离散序列^[4]。

定义 $B[\hat{S}(f)] = E[\hat{S}(f)] - S(f)$ (14)

从式(7)可得, $E[\hat{S}(f)] = S(f) * H_l^2(f)$, 则

$$E[\hat{S}(f)] = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \int_{-1/2}^{1/2} S(f-y) H_l^2(y) dy$$
 (15)

假设 $S(f)$ 具有连续的二阶导数 $S''(f)$, 则由中值定理有

$$S(f-y) = S(f) - y S'(f) + (y^2/2) S''[f - \theta(y)] \quad |\theta(y)| \leq 1$$
 (16)

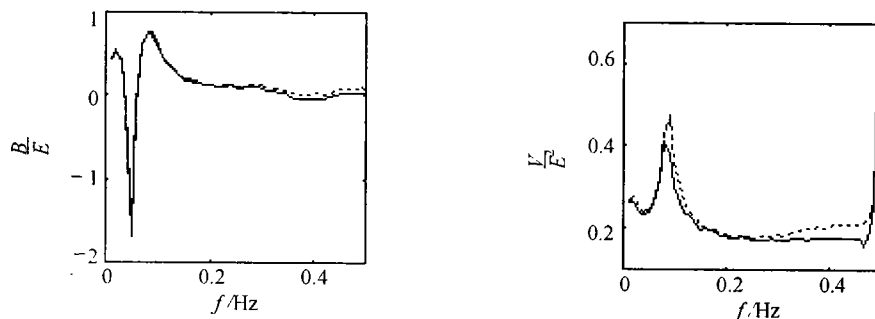
所以, 利用约束条件式(3), 从式(14)~(16)可以求出

$$B[\hat{S}(f)] \approx S''(f) / 2K \sum_{l=1}^K \int_{-1/2}^{1/2} f^2 H_l^2(f) df$$
 (17)

由式(17)可以看出, 当信号的功率谱幅度变化比较剧烈时, 多窗口谱分析方法可能会有较明显的偏差。

$$E[\hat{S}(f)] = E \left[\frac{1}{K} \sum_{l=1}^K h_l^T \Psi^H(f) x x^T \Psi(f) h_l \right] = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K h_l^T \Psi^H(f) R_x \Psi(f) h$$
 (18)

在实际计算中, 用计算式(18)来对不同的频率点计算 $E[\hat{S}(f)]$ 。式(18)中, $\Psi(f) = \text{diag}[1 \exp(-j2\pi f) \dots \exp(-j2\pi(N-1)f)]$, R_x 是序列 $x(n)$ 的自相关阵。为使偏差的计算在不同频率点处可比, 图 4 中所绘是 $B[\hat{S}(f)] / E[\hat{S}(f)]$ 的曲线。从图中可以明显看出偏差大小与 $S''(f)$ 的关系。此外, 由于具有较小的代价函数, 所以 MS 多窗口的估计偏差要略小于 DPSS 多窗口估计方法。



实线为 MS 多窗口, 虚线为 DPSS 窗

图 4 偏差与方差性能对比

2.2.2 估计方差

文献[6]指出, 当被估计序列的真实谱不具有局部白谱的特征而是有明显的幅度变化时, 多窗口谱估计各特征谱 $\hat{S}_l(f)$ 不再统计独立, 因而 $\hat{S}(f)$ 的估计方差不再满足式(8)的关系, 应当用下式计算

$$V[\hat{S}(f)] = \frac{1}{K^2} \left\{ \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \left| \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N h_l(u) h_m(t) r(t-u) e^{-j2\pi(u-n)f} \right|^2 + \sum_{l=1}^K \sum_{m=1}^K \left| \sum_{t=1}^N \sum_{u=1}^N h_l(u) h_m(t) r(t-u) e^{-j2\pi(u+n)f} \right|^2 \right\}$$
 (19)

式中 $r(n)$ 是输入过程的自相关序列, 对 t, u 的求和可以通过两次快速傅氏变换进行快速计算^[7]。同样地, 为了便于比较不同频率处的方差大小, 图 4 中所绘为 $V[\hat{S}(f)] / E[\hat{S}(f)]^2$ 的曲线。根据实验结果可以得出以下结论: 1) MS 多窗口与 DPSS 多窗口方法具有相似的方差性能; 2) 虽然在频率

变化较剧烈处($f=0.05$)多窗口谱分析的方差有所增大,但仍小于单窗口谱分析方法的估计方差 $1/3$);在谱比较平滑时($f>0.2$),多窗口谱估计的方差近似等于 $1/K=1/6$ 。

3 结 束 语

本文利用最小化频谱泄漏代价函数的方法推导了一组多正弦窗口谱分析方法,利用最小化代价函数 $\sin^2(\pi f)$ 得出了严格、精确的结论。此外,本文还结合两个仿真实验对MS与DPSS多窗口方法作了性能对比。结果表明,MS多窗口与DPSS多窗口方法的估计方差与偏差水平大体相近,MS方法的估计性能略优于DPSS方法。更重要的是,由于MS多窗口具有简单直观的正弦窗形式,因而在产生窗口序列时无须复杂的计算,具有更好的实用价值。此外,由于MS多窗口与DPSS多窗口在主瓣内幅度较为平坦,所以不利于谱峰的检测。但是,与DPSS方法相比,由于窗函数计算的简单性,MS方法可以考虑随信号谱幅度的变化而自适应地不同频率处调整窗口数(或分辨带宽)的方法来获得较好的谱峰,这一优点是DPSS多窗口谱分析方法所难以实现的。

参 考 文 献

- 1 Thomson D J. Spectrum estimation and harmonic analysis. Proc IEEE, 1982, 70(9):1 055~1 096
- 2 Lanzerotti L J, Thomson D J, Medford L V *et al.* Electromagnetic study of the Atlantic continental margin using a section of a transatlantic cable. Journal Geophys Res, 1986, B7:7 417~7 427
- 3 Bronez T P. On the performance advantage of multitaper spectral analysis. IEEE Trans on Signal Processing, 1992, 40(12): 2 941~2 946
- 4 Papoulis A. Minimum-bias windows for high-resolution spectral estimates. IEEE Trans on Information Theory, 1973, IT-19(1): 9~12
- 5 Roux J L, Ménez J. A cost minimization approach for optimal window design in spectral analysis of sampled signals. IEEE Trans on Signal Processing, 1992, 40(4): 996~999
- 6 Walden A T, McCoy E, Percival D B. The variance of multitaper spectrum estimates for real gaussian processes. IEEE Trans on Signal Processing, 1994, 42(2): 479~482
- 7 林水生, 郑文学.一种实现任意基FFT的快速整序算法.电子科技大学学报,1998,27(4): 343~346

Multitaper Spectral Analysis Based on A Cost Minimization Approach

Yu Sheng He Piyan Chen Guangju

(CAT Research Lab., UEST of China Chengdu 610054)

Abstract A multitaper spectral estimator is built based on the minimization of a cost function. It is indicated by the performance analysis that the approach here has comparative bias and variance as the approach of discrete prolate spheroidal sequence multitaper spectral analysis. Compared with the DPSS, instead of solving the problem of matrix eigenvalues, the multitaper in this paper needs less calculation with intuitionistic and analytical expression of tapers. The validity and the correctness of the approach are verified by the computer emulation of a discrete white noise sequence and an AR progress.

Key words spectral analysis; multitaper; discrete prolate spheroidal sequence; spectral leakage; bias