

一类非线性动力学系统的变结构混沌控制

徐红兵* 吕炳朝 陈光禡

(电子科技大学自动化系 成都 610054)

【摘要】 对于 Duffing 模型非线性动力学系统, 当系统处于混沌时, 引入带扰动补偿的变结构控制律, 能使系统快速到达滑动模态, 并沿着滑动模态渐进到达系统的平衡点, 从而保证了混沌控制的稳定和鲁棒性。理论分析和仿真验证表明了混沌控制算法的有效性。

关键词 混沌; 变结构; 非线性; 动力学系统

中图分类号 TP273

Duffing 模型所代表的非线性动力学系统表现了丰富的动力学特性, 已成为研究非线性阻尼振荡、分岔、混沌的常用模型之一。混沌作为一种复杂的动态系统行为, 具有对初始条件的敏感性, 具有正的最大 Lyapunov 指数及分数维。当混沌对系统有害时, 应采用适当的控制方法来减弱或完全抑制混沌。变结构控制基于滑动模态来进行控制, 对于系统的摄动及干扰具有强的鲁棒性。文献 [1] 采用变结构控制针对 Lorenz 混沌系统进行了有效的控制, 但 Duffing 模型混沌系统为非自治系统, 采用变结构控制存在一定难度。本文通过引入带扰动补偿的变结构控制律, 成功地实现了 Duffing 模型非线性动力学系统的变结构控制, 理论分析和仿真验证表明了控制的有效性。

1 Duffing 模型非线性动力学系统

Duffing 模型非线性动力学系统可以用 Duffing 方程表示为

$$\ddot{x} + p\dot{x} + p_1x + x^3 = q \cos(\omega t) \quad (1)$$

式中 t 为时间变量; p 、 p_1 、 q 、 ω 为实常量, 且 $p > 0$ 。方程的解随着参数的变化可从振荡周期解分岔为对称周期解, 然后经过一系列的倍周期过程而进入混沌状态。如可取参数 $p=0.4$, $p_1=1.1$, $\omega=1.8$, 则当 $q=0.62$ 时, 系统进入周期 1 状态; 当 $q=1.498$ 时, 系统进入周期 2 状态; 当 $q=1.8$ 或 2.1 时, 系统进入混沌状态。

2 变结构控制律

2.1 扰动补偿变结构控制^[2]

对于具有不确定性和外部干扰的动态系统状态方程可表述为

$$\dot{x}(t) = [A(x) + \Delta A(x, \rho)] + [B(x) + \Delta B(x, \rho)]u(t) + f(x, \rho, t) \quad (2)$$

式中 $x(\cdot) \in R^n$; $u(\cdot) \in R^m$; $A(\cdot)$ 、 $\Delta A(\cdot) \in R^n$; $B(\cdot)$ 、 $\Delta B(\cdot) \in R^{n \times m}$; $\Delta A(\cdot)$ 与 $\Delta B(\cdot)$ 为不确定性参数扰动; ρ 为属于某个有界闭集的不确定性参数; $f(\cdot) \in R^n$ 表示未建模动态和外部干扰。当系统满足匹配条件时, 可将系统的所有不确定项表述为 $E(x, \rho, u, t)$, 式(2)可改写为

$$\dot{x}(t) = A(x) + B(x)u(t) + B(x)E(x, \rho, u, t) \quad (3)$$

设 $E(x, \rho, u, t)$ 有界, 且满足

$$\|E(x, \rho, u, t)\| \leq \delta E(x, \rho, u, t) \quad (4)$$

选择滑动平面 $\sigma(x)$ 为

$$\sigma(x) = [\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)]^T = 0 \quad (5)$$

$\sigma(x)$ 对时间 t 连续可导, 设 $(\partial\sigma/\partial x)B(x)$ 对于所有的 x 非奇异, 则变结构控制律可表述为

$$u = u_{eq} + u_n + u_{cmp} \quad (6)$$

式中 u_{eq} 为等价控制; u_n 为切换控制, 用以保证在不确定性存在时系统具鲁棒性且有期望的滑动模态; u_{cmp} 为引入以补偿系统的不确定动态, 易得

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} A(x) \quad (7)$$

式中 σ 、 B 为 $\sigma(x)$ 、 $B(x)$ 的简写, 而

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right)(u_n + u_{cmp}) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} BE \quad (8)$$

式中 E 为 $E(x, \rho, u, t)$ 的简写。即

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} BE = \dot{\sigma} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right)(u_n + u_{cmp}) \quad (9)$$

假设

$$\|\dot{\sigma}(x) - \dot{\sigma}_m(x)\| \leq \delta \dot{\sigma}(x) \quad (10)$$

则可得

$$T_{per} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} BE_m = \dot{\sigma}_m - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right)(u_n + u_{cmp}) \quad (11)$$

式中 $\sigma_m(x)$ 、 E_m 分别为 $\sigma(x)$ 、 E 的估计值。

定理 式(3)所描述的系统, 如满足式(4)、式(10), 则当控制项 u 满足式(12)时, 系统滑模存在且可达, 即 $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 成立。

$$u = u_{eq} + u_n + u_{cmp} \quad (12)$$

式中

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} A(x)$$

$$u_n = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right)^{-1} (K\sigma + d \frac{\sigma}{\|\sigma\|})$$

$$u_{cmp} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B\right)^{-1} T_{per}$$

$$T_{per} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} BE_m$$

且满足

$$d \geq \delta \dot{\sigma} + \varepsilon \quad (13)$$

式中 K 为对称正定阵; d 、 ε 为正的常量。

证明 选取正定函数

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (14)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \left(-K\sigma - d \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - T_{per} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} BE \right) = \\ &= -\sigma^T K\sigma - d \|\sigma\| + \sigma^T \delta \dot{\sigma} \leq -\lambda_{\min}(K) \|\sigma\|^2 - \varepsilon \|\sigma\| \end{aligned}$$

(15)

即 V 为正定, \dot{V} 为负定, $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 。

证毕

2.2 Duffing 模型非线性动力学系统变结构控制律

引入控制项的 Duffing 模型非线性动力学系统可重新表述为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -p_1 x - py - x^3 + u + f(t) \end{cases} \quad (16)$$

式中 $f(t) \equiv q \cos(\omega t)$ 。

可选

$$\sigma = \dot{e} + ce \quad (17)$$

式中 $e \equiv x - x_d$, x_d 为期望的光滑轨迹; c 为常量。

由式(12)易得控制律为

$$\begin{cases} u = u_{eq} + u_n + u_{cmp} \\ u_{eq} = p_1 x + x^3 + (p - c)y + \ddot{x}_d + c\dot{x}_d \\ u_n = -[k(\dot{e} + ce) + d \operatorname{sgn}(\dot{e} + ce)] \\ u_{cmp} = -q \cos(\omega t) \end{cases} \quad (18)$$

3 仿真

当 Duffing 模型非线性动力学系统参数取 $p=0.4, p_1=-1.1, q=2.1, \omega=1.8$ 时, 系统处于混沌状态。要求系统能完全抑制混沌并跟踪期望的运动轨迹为 $x_d(t) = \sin t, t \geq 0$ 。未加控制项的误差状态曲线如图 1 所示。当系统处于混沌状态, $t \geq 25$ s 时, 引入控制项式 (18), 当获取的系统参数估计误差为 20% 时, 从误差状态曲线图 2 中可以看出, 当混沌系统引入控制项后, 系统迅速从混沌状态到达滑动模态, 并沿着滑动模态趋近于原点。

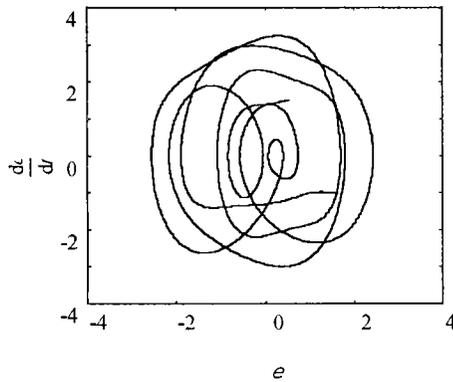


图 1 未加控制项时的误差混沌状态曲线

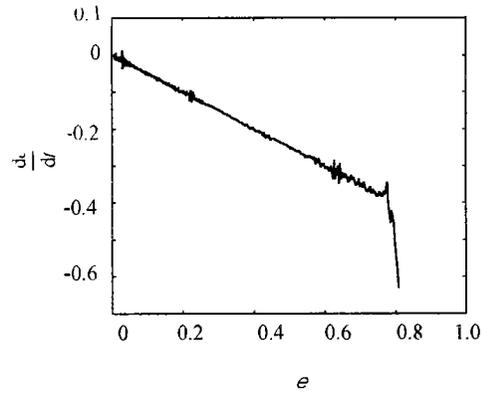


图 2 加入控制项后的误差状态曲线

4 结束语

Duffing 模型所代表的非线性动力学系统, 当系统处于混沌状态时, 可以基于其 Duffing 模型方程来进行控制。当 Duffing 模型方程参数具有不确定性时, 将会影响控制效果。本文通过引入带扰动补偿的变结构控制律, 成功地实现了 Duffing 模型非线性动力学系统的变结构控制, 使混沌系统的控制稳定且具有鲁棒性。

参 考 文 献

- 1 Yu X. Controlling Lorenz chaos. International Journal of Systems Science, 1996, 27(4): 355 ~ 359
- 2 Chan S P. An approach to perturbation compensation for variable structure systems. Automatica, 1996, 32(3): 469 ~ 473

Controlling Chaos in Nonlinear Dynamical System Using Variable Structure

Xu Hongbing Lu Bingchao Chen Guangju

(Department of Automation, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Chaotic control of a nonlinear dynamic system in the presence of model uncertainty is investigated in this paper. Control compensation is incorporated into the design of variable structure control and makes the control system robust. Simulation demonstrates the effectiveness of the approach.

Key words chaos; variable structure; nonlinear; dynamic system