第28卷 第3期
1999年6月

电 子 科 技 大 学 学 报
Journal of UEST of China

Vol.28 No.3
Jun. 1999

调制马氏链与两状态调制半马氏链的匹配

吴传志* 付诗禄 蒋银华

(后勤工程学院基础部 重庆 400016)

【摘要】 在用流体近似法研究 ATM 复用器的输入过程时，一般假设单个信源的控制过程为两状态马氏链。迭加后的输入过程是一个控制过程为多状态、连续时间、不可分马氏链的马氏调制过程。由于状态个数很大，不便于对缓冲器容量的研究。文中将它匹配成只有两个状态的半马氏调制过程，由于状态个数仅为两个，简化了理论分析和数值分析过程。

关 键 词 ATM复用器； 马氏调制过程； 流体模型； 统计匹配

中图分类号 TN911.2

ATM 传输数据包十分迅速，可以认为数据包是被连续不断地传输的，这就是流体近似。研究流体模型的文献[1]，一般都假设输入过程为多个两状态 MMP 的迭加(仍为 MMP，状态个数增多，如图 1 所示)。本文将这个输入过程匹配成一个只有两个状态的半马氏调制过程。虽然它已不再具有马氏性，但由于其状态个数只有两个，在考察缓冲器容量时十分简便。本文采用的方法类似于文献[2]。先计算原有输入率过程$\{\lambda(t),t\ge 0\}$在时刻 t 的平均输入率 $E\lambda(t)$ 及其相关函数 $B(\tau)$；再计算两状态(本文将状态空间$\{0,1,2,\cdots,N-1\}$分成$\{0\}$和$\{0,1,2,\cdots,N-1\}$)两个状态半马氏调制输入率过程对应的平均输入率 $E\underline{\lambda}(t)$ 及其相关函数 $\underline{B}(\tau)$；最后进行匹配。

1 N 状态、连续时间、不可分的马氏调制输入过程

在图 1 的 ATM 传输模型中，假设 N-1 个信源独立同构。每一个信源有开、关两个状态，开时信源以速率σ输入信号，关时无信号。这样，在任意时刻 t，若共有 k 个信源处于开状态，就记迭合输入过程处于状态 k，其输入率为 $k\sigma$。当单个信源的控制过程为不可分马氏链时，ATM 输入的控制过程就是一个连续、不可分生灭链，状态空间为$\{0,1,2,\cdots,N-1\}$。我们把模型一般化，设有一个连续、不可分马氏链，状态空间为$\{0,1,2,\cdots,N-1\}$，密度矩阵为$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$，平稳概率为$\{p_i,i=0,1,2,\cdots,N-1\}$，当过程处于状态 j 时，信元以速率$\lambda_j\ge 0$（不一定等于 $j\sigma$）到达 ATM 复用器。记 t 时刻的信元输入率为$\lambda(t)$，当过程已到达平稳状态时，易知

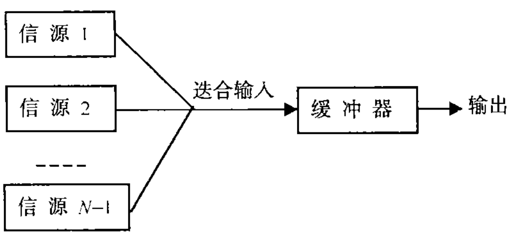

图 1 ATM 传输模型

$$E\lambda(t)=\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j P_j \tag{1}$$

$$E\lambda^2(t)=\sum_{j=0}^{N-1}\lambda^2{}_j P_j<\infty \tag{2}$$

相关函数为

$$B(\tau)=E[\lambda(t)\lambda(t+\tau)]=\sum_{i,j=0}^{N-1}\lambda_i\lambda_j P_i P_{ij}(|\tau|) \tag{3}$$

因此，信元输入率过程$\{\lambda(t),t\ge 0\}$在控制过程达到平衡状态时是一个弱平稳过程。

2 近似为两状态过程

当状态个数 N 较大时，该模型的排队分析是很复杂的。在计算

$$\pi_j(x)=\lim_{t\to\infty}P_r[x(t)=j,Q(t)\le x] \qquad j=0,1,2,\cdots,N-1$$

1998年7月16日收稿,1998年10月28日修改定稿

* 男 29岁 硕士 讲师

当 $X(t)$为 t 时刻控制过程的状态，$Q(t)$为缓冲器容量时，其他 $N-1$ 个状态属何状态对于 j 来说无关紧要，因此可以把状态 j 看作是过程的一个状态，而其他 $N-1$ 个状态均看作过程的另一个状态，这样就把 N 状态过程近似为两状态过程[1]。这个两状态过程是一个更新过程，需要有 4 个参数来确定：两个状态的延续时间分布 $H(x)$、$G(x)$，两状态时的信元到达率。本文是通过合理地选取这 4 个参数，对原过程进行了拟合。

不失一般性，当 $X(t)=0$ 时，认为过程处于 ON 状态，延续时间分布为 $H(x)$；否则认为过程处于 OFF 状态，延续时间分布为 $G(x)$。此时，ON 状态时的信元到达率仍为 λ_0 常数，而 OFF 状态时的信元到达率是一个复杂的随机变量，不再为常数。在进行匹配时，选取一个合适的常数 λ，当过程处于 OFF 状态时，认为信元以恒定到达率 λ 到达。故有以下结论：

引理 1　将状态空间 $\{0,1,2,\cdots,N-1\}$ 分为两部分 B、G[3]。

1) 已知 $X(t)=i\in B$，记 T_i 为 t 时刻直到进入 G 的这段时间。$F_i^*(s)=E\lfloor \mathrm{e}^{-sT_i}\rfloor$为 T_i 的拉氏变换，则

$$F_i^*(s)=\frac{v_i}{v_i+s}\left[\sum_{j\in B}F_i^*(s)P_{ij}+\sum_{j\in G}P_{ij}\right]\qquad i\in B$$

其中　$P_{ij}=q_{ij}\Big/\sum_{j\neq i}q_{ij}$，$v_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}$。

2) 已知过程刚进入状态子空间 B。记 T_v 为在 B 内的逗留时间，则

$$E\lfloor \mathrm{e}^{-sT_v}\rfloor=\sum_{j\in B}\sum_{j\in G}F_i^*(s)P_jq_{ji}\Big/\sum_{j\in G}\sum_{k\in B}P_jq_{jk}$$

定理 1

$$H(x)=1-\mathrm{e}^{-v_0x}\tag{4}$$

$$G(x)=\sum_{i=1}^{N-1}P_{0i}G_i(x)\qquad x\geq 0\tag{5}$$

式中　$G_i(x)$是常系数非齐次线性微分方程组

$$\begin{bmatrix}G_1'(x)\\G_2'(x)\\\vdots\\G_{N-1}'(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-v_1 & q_{12} & \cdots q_{1N-1}\\ q_{21} & -v_2 & \cdots q_{2N-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ q_{N-11} & q_{N-12} & \cdots -v_{N-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_1(x)\\G_2(x)\\\vdots\\G_{N-1}(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q_{10}\\q_{20}\\\vdots\\q_{N-10}\end{bmatrix}\tag{6}$$

的满足初始条件 $G_i(0)=0$，$i=1,2,\cdots,N-1$ 的解。

证明　1) 设 $B=\{0\}$，$G=\{1,2,\cdots,N-1\}$，据引理 1 有

$$F_0^*(s)=\frac{v_0}{v_0+s}\left[F_0^*(s)P_{00}+\sum_{j=1}^{N-1}P_{0j}\right]$$

其中　$P_{00}=0$，$\sum_{j=1}^{N-1}P_{0j}=1$，故 $F_0^*(s)=\dfrac{v_0}{v_0+s}$，于是

$$E[\mathrm{e}^{-sT_v}]=\sum_{j=1}^{N-1}F_0^*(s)P_jq_{j0}\Big/\sum_{j=1}^{N-1}P_jq_{j0}=F_0^*(s)=\frac{v_0}{v_0+s}$$

因此，$F(x)=1-\mathrm{e}^{-v_0x}$，$x\geq 0$。

2) 设 $B=\{1,2,\cdots,N-1\}$，据引理 1 有

$$v_iF_i^*(s)+sF_i^*(s)=\sum_{j=1}^{N-1}q_{ij}F_j^*(s)+q_{i0}\qquad i=1,2,\cdots,N-1$$

两边取拉氏逆变换，有

$$v_iG_i(x)+G_i'(x)=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N-1}q_{ij}G_j(x)+q_{i0}U_0(x)$$

即

$$G_i'(x)=\sum_{j=1}^{N-1}q_{ij}G_j(x)+q_{i0}U_0(x) \quad （令 q_{ii}=-v_i,\ U_0(x) 为脉冲函数）$$

因为$G_i(x)$为T_i的分布函数，当$x<0$时，$G_i(x)=0$，故当$x\geq 0$时

$$G_i'(x)=\sum_{j=1}^{N-1}q_{ij}G_j(x)+q_{i0} \qquad i=1,2,\cdots,N-1$$

其矩阵形式即为式(6)。

再根据引理1有

$$E[\mathrm{e}^{-sT_v}]=\sum_{i=1}^{N-1}F_i^*(s)P_0q_{0i}\Big/\sum_{k=1}^{N-1}P_0q_{0k}=\sum_{i=1}^{N-1}P_{0i}F_i^*(s)$$

所以

$$G_i(x)=\sum_{j=1}^{N-1}q_{0i}G_i(x)$$

3 匹配λ

当状态为$1,2,\cdots,N-1$之一时，认为过程处于状态 OFF，信元到达率是一个较为复杂的随机变量，此时控制过程是一个更新过程(两状态半马氏链)。 如果信元到达率为常数λ，模型的分析就简单多了。

先假设已知λ，记信元产生率为$\underline{\lambda}(t)$，与前面类似有$\{\underline{\lambda}(t)\},t\geq 0\}$在控制过程达到平衡状态时亦为一弱平稳过程，且

$$E\underline{\lambda}(t)=\lambda_0P_0+\lambda(1-P_0) \tag{7}$$

$$E[\underline{\lambda}(t)]^2={\lambda^2}_0P_0+\lambda^2(1-P_0) \tag{8}$$

相关函数

$$B(s)=E[\underline{\lambda}(t)\underline{\lambda}(t+\tau)]=L(s)\lambda^2+M(s)\lambda+N(s) \tag{9}$$

其中

$$L(s)=1-P_0-\sum_{i=1}^{N-1}P_iP_{i0}(s)$$

$$M(s)=\sum_{i=1}^{N-1}P_iP_{i0}(s)\lambda_0+P_0[1-P_{00}(s)]\lambda_0$$

$$N(s)={\lambda^2}_0P_0P_{00}(s)$$

由于$H(x)$，$G(x)$，λ_0三个指标已精确给出，需匹配的仅一个指标λ，比较简单的方法如下：

1）令$E\underline{\lambda}(t)=\lambda(t)$，得到

$$\lambda=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{P_i}{1-P_0}\lambda_i \tag{10}$$

2） 令$E[\underline{\lambda}(t)]^2=[\lambda(t)]^2$，得到

$$\lambda=\sqrt{\sum_{i=1}^{N-1}\frac{P_i}{1-P_0}{\lambda^2}_i} \tag{11}$$

但是，上述方法过于简单化，考虑到相关函数能较好地反映随机过程的关联程度，我们采用最小二乘法，即选取λ，使$[E\underline{\lambda}(t)-E\underline{\lambda}(t)]^2+[\underline{B}(s)-B(s)]^2$最小。记

$$F(\lambda,s)=E[\underline{\lambda}(t)-E\lambda(t)]^2+[\underline{B}(s)-B(s)]^2=$$
$$[\lambda_0P_0+(1-P_0)\lambda-E\lambda(t)]^2+[(L(s)\lambda^2+M(s)\lambda+N(s))-B(s)]^2$$

令$\dfrac{\partial F(\lambda,s)}{\partial\lambda}=0$，得

$$2[\lambda_0P_0+(1-P_0)\lambda-E\lambda(t)](1-P_0)+2[(L(s)\lambda^2+M(s)\lambda+N(s))-B(s)][2L(s)\lambda+M(s)]=0$$

即

$$\begin{aligned}&2L^2(s)\lambda^3+3L(s)M(s)\lambda^2+\left[2L(s)N(s)-2L(s)B(s)+M^2(s)+(1-P_0)^2\right]\lambda+\\&\left[M(s)N(s)-M(s)B(s)-(1-P_0)(E\lambda(t)-\lambda_0P_0)\right]=0\end{aligned}\tag{12}$$

这是一个关于 λ 的三次方程。通过简单的分析可知，式(12)有唯一的正数解，而且这个解使得 $F(\lambda,s)$ 最小，由它确定的正数 λ 即为匹配值。

综上所述，对于一个 N 状态、连续时间、不可分的马氏调制输入过程，可以将它匹配成一个两状态的半马氏调制输入过程，其控制过程是更新过程。状态{0}的延续时间分布为 $H(x)=1-e^{-\nu_0 x}$，而状态{1,2,…, N–1}的延续时间分布 $G(x)$由定理 1 确定。当过程处于状态{0}时，输入率 λ_0；当过程处于状态{1,2,…，N–1}时，输入率 λ 是方程(12)的解。

参 考 文 献

1　Anick D, Mitra d, Sonhi M M. Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources. The Bell System Technical Journal, 1982, 61(8):1 871~1 894

2　Hffe S H, Iucantoni D M. A Markov modulated characterization of packetized voice and ate. Traffic and related statistical multiplexer performance IEEE'1986, JSAC,1986, 4(6):856~868

3　Ross S M. Stochastic processes. New York: John Wiley & Sons,1983

Matchment of a MMP with a Two-state Semi-MMP

Wu Chuanzhi　　Fu Shilu　　Jiang Yinhua

(Basic Department, Logistics Engineering College　Chongqing　400016)

Abstract　In general, suppose the controlling process of the single source for ATM MUX be a two-state Markov chain in the fluid mode, the superposition to the ATM MUX is a MMP whose controlling process is a muti-state, continuous, irreducible MC.It is inconvenient to study the content of the buffer because of the large number of state. To solve this problem, this paper gives a method to match the MMP with a simple two-state semi-MMP.

Key words　ATM MUX;　Markov modulated process;　fluid flow model;　statistical match