

规则区域上 Helmholtz 方程的一种快速算法*

龙毅** 徐军 朱汉清

(电子科技大学应用物理研究所 成都 610054)

【摘要】 采用有限差分法对 Helmholtz 方程进行五点差分离散, 在规则区域上引入快速傅里叶变换 (FFT), 将差分方程变换成一组三对角方程, 使求解规则子区域上 Helmholtz 方程的计算量降为 $O(P \lg P)$, 最后的数值结果证明了文中的算法是一种快速算法。

关键词 有限差分法; 快速傅里叶变换; Helmholtz 方程; 快速算法
中图分类号 TN817; O441

长期以来对波导不连续问题的分析虽然有许多解析和近似方法, 但通常是采用模式匹配法和有限差分、有限元等数值方法, 模式匹配法以其物理概念清楚、直观有效的特点, 得到了广泛应用。但对复杂结构的分析, 模式匹配法的公式推导繁锁, 且随着模式的增加, 计算量比较大。有限元、有限差分及时域有限差分等数值方法对复杂问题有较强的普适性, 但解决问题的规模受到计算机硬件条件的限制。

近几年来, 为了解决大规模数值计算问题, 基于有限差分和有限元的区域分解法得到了广泛研究^[1,2], 用于石油、地质勘探、大型结构工程、计算流体力学等领域, 也有用于电磁场工程的研究报道^[3,4]。区域分解法是把计算区域分解为若干子域, 子域的形状尽可能规则, 于是原问题的求解转化为在子域上求解。它有其他方法无可比拟的优点, 其一是把大问题化为若干小问题, 缩小计算规模; 其二算法是高度并行的, 即计算的主要步骤是在各子域内独立进行的, 而子域往往是规则区域。故规则区域上快速算法的研究, 对于提高区域分解算法的效率有直接关系。

本文针对波导 E 面结构不连续问题(如 E 面结构滤波器、双工器等)建立 Helmholtz 方程及边界条件, 并在规则区域上引入 FFT 变换将差分离散的 Helmholtz 方程及边界条件变换成一组三对角方程, 每一个三对角方程可以用追赶法快速求解, 理论分析及数值结果表明这一算法的工作量仅为 $O(P \lg P)$ 。

1 模型建立

如图 1 所示为波导 E 面不连续结构, 由于 y 方向的均匀性, 当以主模 TE_{10} 模入射时, 不连续性结构仅能激励起 TE_{m0} 次模, 设: 时谐因子为 $\exp(j\omega t)$, $u = E_y$ 。则对 TE_{m0} 模 u 满足如下的 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_0^2 u = 0 \tag{1}$$

式中 $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, u 在上下边界上满足第一类边界条件

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0 \tag{2}$$

设置左右边界 $T_1: z = L_1$ 和 $T_2: z = L_2$ 构成一完整的边值问题。设 T_1 和 T_2 参考面离不连续性结构足够远, 由不连续性产生的高次模在到达 T_1 和 T_2 面之前已经消失, 即只有主模存在, 因此在 T_1 面上, 总场可表示为入射和反射的 TE_{10} 波的叠加, 而在 T_2 面上, 仅有透射的 TE_{10} 波, 即

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_z 10z} + R \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{jk_z 10z} \tag{3}$$

1999年6月5日收稿

* 国防工委预研基金资助项目

** 男 35岁 博士 讲师

$$u(x, y) = T \sin\left(\frac{\pi x}{\alpha}\right) e^{-jk_z 10z} \quad (4)$$

式中 R 表示反射系数, T 表示透射系数, k_{z10} 为主模传播系数。将 $z = L_1$ 和 $z = L_2$ 分别代入式(3)、(4), 即得到 T_1 和 T_2 面上有关 u 的边界条件

$$T_1 \text{ 面} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = jk_{z10} u = -j2k_z 10 \sin\left(\frac{\pi x}{\alpha}\right) e^{-jk_{z10} L_1} \quad (5)$$

$$T_2 \text{ 面} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -jk_{z10} u \quad (6)$$

而在区域内部不连续结构上, 对于金属导体, 满足如下边界条件

$$u|_{\text{obstacle}} = 0 \quad (7)$$

最后由式(1)、(2)和式(5)~(7)得到波导 E 面不连续结构的边值问题, 求解这一边值问题即可得到场分布以及整个电路的 S 参数。

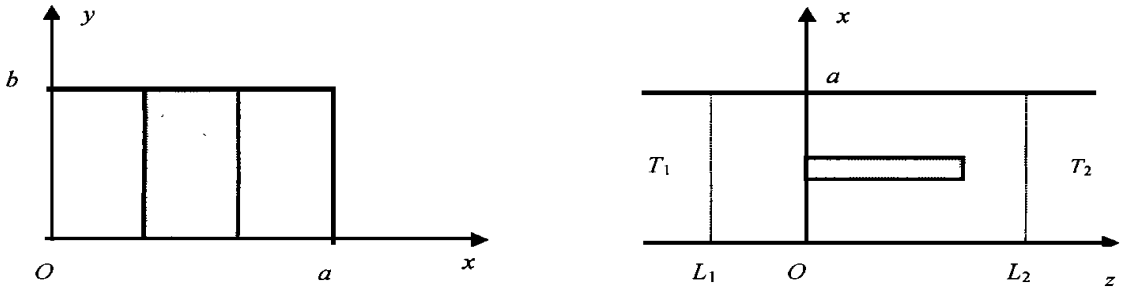


图 1 波导 E 面不连续结构

2 规则区域上的快速傅里叶变换 (FFT)

对于上面复杂结构的边值问题, 采用区域分解法总可以将区域划分成若干个尽可能规则的子区域, 在规则子区域上, 考虑式(2)、(5)、(6)的两类边界条件, 则问题转化为如下模型即 $a \times L$ 区域上的边值问题。

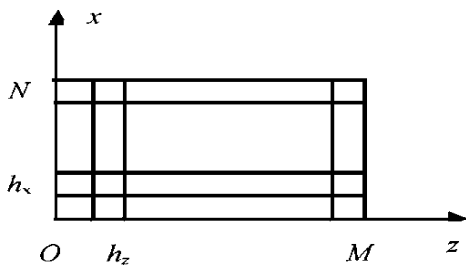


图 2 规则子区域上差分网格

$$\begin{cases} \nabla^2 u + k_0^2 = 0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = jk_{z10} u|_{z=0} - j2k_z 10 \sin\left[\frac{\pi x}{\alpha}\right] \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=L} = -jk_{z10} u|_{z=L} \end{cases} \quad (8)$$

将区域划分为沿 x 和 z 方向各 N 和 M 个差分网格, 步长 $h_x = h_z = h$, 差分网格如图 2 所示, 则内点分方程为

$$u(m-1, n) + u(m+1, n) + u(m, n+1) + u(m, n-1) - (4 - k_0^2 h^2) u(m, n) = 0 \quad (9)$$

左边界上差分方程为

$$2u(1, n) + u(0, n+1) + u(0, n-1) - (4 - k_0^2 h^2 + j2k_z 10 h) u(0, n) = -j4k_z 10 h \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} n h\right) \quad (10)$$

右边界上差分方程为

$$2u(M-1, n) + u(M, n+1) + u(M, n-1) - (4 - k_0^2 h^2 + j2k_z 10 h) u(M, n) = 0 \quad (11)$$

对上述差分方程作如下正弦变换

为便于 FFT 变换, 取 $N=2^p$ 网格点数, 则可以采用以 2 为基的 FFT 变换, 在 PC Pentium/MMX160 微机上运算, 三种方法的计算时间比较列于表 2。在 CG 迭代时, 我们利用差分矩阵的稀疏性以提高每次迭代时矩阵与矢量相乘的计算效率, 从计算结果可以看到本文的 FFT 方法计算效率有大幅度提高, 并且随着未知量个数的增加, FFT 方法相对其他两种方法具有明显的优越性。另外从算法可知, 本文的 FFT 方法, 每次只需求解 $M+1$ 阶的三对角方程, 其内存的需求也较其他两种方法大幅度下降。

表 1 FFT 方法和直接求解、CG 迭代的结果比较 ($M \times N=12 \times 32$)

x/h ($z=5$)	准确值	直接解	CG	FFT
2	(-0.063 8, -0.074 4)	(-0.067 2, -0.073 3)	(-0.067 0, -0.073 1)	(-0.065 1, -0.073 3)
4	(-0.188 8, -0.220 5)	(-0.199 0, -0.217 2)	(-0.198 4, -0.216 4)	(-0.192 8, -0.217 0)
6	(-0.306 7, -0.358 0)	(-0.323 2, -0.352 7)	(-0.322 1, -0.351 4)	(-0.313 0, -0.352 4)
8	(-0.412 7, -0.481 8)	(-0.434 9, -0.474 6)	(-0.433 5, -0.473 1)	(-0.421 3, -0.474 3)
10	(-0.502 9, -0.587 1)	(-0.529 9, -0.578 3)	(-0.528 2, -0.576 3)	(-0.513 3, -0.578 0)
12	(-0.573 7, -0.669 8)	(-0.604 6, -0.659 8)	(-0.602 7, -0.657 5)	(-0.585 7, -0.659 4)
14	(-0.622 5, -0.726 8)	(-0.656 1, -0.715 9)	(-0.653 9, -0.713 4)	(-0.635 5, -0.715 5)
16	(-0.647 4, -0.755 8)	(-0.682 3, -0.744 6)	(-0.680 0, -0.741 9)	(-0.660, -0.744 1)

表 2 FFT 方法与直接法和 CG 法计算时间比较

$M \times N$	直接法/s	CG 法/s	FFT/s
12 × 32	34	8.02	0.005
12 × 64	330	68	0.011
12 × 128	3 121	544.7	0.027
12 × 256	—	—	0.050
12 × 512	—	—	0.094
12 × 1 024	—	—	0.203
12 × 2 048	—	—	0.478

4 结论

本文引入快速傅里叶变换(FFT)将规则区域上 Helmholtz 方程的差分求解, 变换成一组阶数较低的三对角方程的求解, 由于三对角方程可用追赶法快速求解, 且采用 FFT 实现物理域和求解域之间的变换, 因此这一算法有很高的计算效率。另外每一个三对角方程的阶数较低, 内存需求大幅度下降, 所以本文提出的 FFT 方法是一种节省内存和计算时间的高效快速算法。将这一 FFT 法用于子区域求解, 结合区域分解法可以快速有效地分析复杂的波导问题, 以及其他的复杂电磁问题。

参 考 文 献

- 1 吕涛, 石济民, 林振宝. 区域分解算法——偏微分方程数值解新技术. 北京: 科学出版社, 1997
- 2 孙家昶, 张林波, 迟学斌, 等. 网络并行计算与分布式编程环境. 北京: 科学出版社, 1996
- 3 Spring C T, Cangellaris A C. Parallel implementation of domain decomposition methods for the electromagnetic analysis of guided wave systems. J Electromagnetic Waves and Application, 1995, 9: 175 ~ 192
- 4 Zhenhai Zhu, Hao Ji, Wei Hong. An efficient algorithm for the parameter extraction of 3-D interconnected structures in the VLSI circuits; domain-decomposition method. IEEE MTT, 1997, 45: 1 179 ~ 1 184

A Fast Algorithm for Solving Helmholtz Equation on Regular Domain

Long Yi Xu Jun Zhu Hanqin

(Inst. of Appl. Phys., UEST of China Chengdu 610054)

Abstract The complicated structure can be divided into several almost regular domains using decomposition domain method (DDM). In this paper, finite difference method (FD) is used to discretize the Helmholtz equation applied with five-points difference discretization. On the regular domain, the fast Fourier transform (FFT) is presented to transform the difference equations to a group of trigonal equations. The theory analysis and numerical results show that the computation complex of this algorithm is about $O(P \lg P)$.

Key words finite difference method; fast Fourier transform; Helmholtz equation; fast algorithm

·科研成果介绍·

60MHz 直接数字频率合成器

主研人员 张玉兴 何放 彭清泉 底海英 汤炎灿

直接数字频率合成器是近年来发展起来的新的频率合成技术。由于采用全数字化, 具有频率分辨率高、跳频速度快, 且相位连续、相位噪声低等突出优点, 是新一代雷达、通信等电子产品的核心技术。

该频率合成器采用了低相位噪声时钟产生技术, 良好的电磁兼容设计技术, 杂散抑制电路技术等, 降低了系统的杂散及相位噪声。采用 HP8563E 测出相位噪声 $L(1 \text{ kHz}) < -104 \text{ dBc/Hz}$ DDS 输出杂散 $60 \text{ MHz} < -55 \text{ dBc}$ 。

该项目是国内 DDS(直接数字频率合成器)用于雷达工程的尝试, 它的成功推动了 DDS 技术向实用化方向发展, 并成功地用于气象雷达的 DDS。由于 DDS 用数字方法产生正弦信号, 杂散多, 且难预知, 一直是限制 DDS 实用的主要原因。该成果在降低杂散上作了大量工作, 并取得成功, 使杂散水平达到器件的极限指标, 满足雷达要求。其接口关系简单, 时钟要求电平为 0 dBm 的正弦波, 频率控制为 16 位二进制码, 给用户带来了极大的方便。

·科 卞·