第28卷 第5期 电子科技大学学报 Vol.28 No.5
1999年10月 Journal of UEST of China Oct. 1999

# 具有时滞的通有连续时间神经网络的指数稳定性

邱亚林*
（龙岩师范专科学校数学系 龙岩 364000）

【摘要】 研究了具有时滞的通有连续时间神经网络的稳定性问题；利用常数变易法并结合不等式分析技巧，获得了具有时滞的通有连续时间神经网络的平衡点全局指数稳定和全局 $k$-指数稳定的判别准则；推广了文献[1]的主要结果。

**关 键 词** 时滞；神经网络；常数变易法；稳定性
**中图分类号** O231

对于神经网络的研究，近几年来已经取得了许多重要成果[1-6]，引起了自然科学和社会科学的不同领域内学者们的极大兴趣，神经网络研究已成为众多学科和领域关注的热点。除了神经科学研究本身的突破和进展的原因之外，更主要的是由于计算机科学和人工智能发展的需要以及 VLSI 技术、生物技术、超导技术和光学技术等领域的迅速发展，提供了技术上的可能性。由于神经网络是一类学习系统，它的连接权系数处于一个不断学习变化的动态过程之中，因而研究神经网络的稳定性具有极其重要的价值。

对于通有连续时间神经网络的研究还不多见，文献[1]给出通有连续时间神经网络的平衡点全局 $k$-指数稳定和全局渐近稳定的判别准则。本文研究了具有时滞的通有连续时间神经网络的稳定性。在神经网络中，时滞是时常出现的，因时滞的作用，对稳定性的研究带来了许多新的研究课题。我们利用常数变易法并结合不等式分析技巧，获得了具有时滞的通有连续时间神经网络的平衡点全局指数稳定和全局 $k$-指数稳定的判别准则，推广了文献[1]的主要结果。

## 1 系统的描述与有关定义

本文研究如下具有时滞的通有连续时间神经网络模型为

$$\begin{cases} c_i\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{u_i(t)}{R_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[T_{ij}^{(1)}v_j(t)+T_{ij}^{(2)}v_j(t-\tau)+w_{ij}^{(1)}u_j(t)+w_{ij}^{(2)}u_j(t-\tau)\right]+I_i \\ v_i(t)=f_i(u_i(t)) \end{cases} \qquad t\geq 0 \tag{1}$$

式中 $R_i>0$ 是电阻；$c_i>0$ 是电容；$T_{ij}^{(1)}$、$T_{ij}^{(2)}$、$w_{ij}^{(1)}$、$w_{ij}^{(2)}$、$I_i$ 均为常数；$f_i(\cdot)$ 表示神经元的非线性特性，并且 $f_i(\cdot)$ 是连续函数；$u_i$ 表示第 $i$ 个神经元的输入；$v_i$ 表示第 $i$ 个神经元的输出。

当 $t_0\geq 0$ 时，设神经网络系统(1)满足的初始条件为

$$u_i(t)=\varphi_i(t) \qquad \forall t\in[t_0-\tau,t_0] \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

式中 $\varphi_i(t)$ 是在 $[t_0-\tau,t_0]$ 上的连续函数。

以下给出神经网络系统(1)的平衡点的定义。

定义 1 如果存在常数向量 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^T\in R^n$，使

$$-\frac{u_i^*}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}\left[\left(T_{ij}^{(1)}+T_{ij}^{(2)}\right)f_j(u_j^*)+\left(w_{ij}^{(1)}+w_{ij}^{(2)}\right)u_j^*\right]+I_i=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

则称 $u=u^*$ 是神经网络系统(1)的平衡点。

设 $u=u^*$ 是神经网络系统(1)的平衡点，做变换 $x_i(t)=u_i(t)-u_i^*$，于是神经网络系统(1)变为

1999年5月4日收稿
* 男 38岁 大学 讲师

$$c_i\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{x_i(t)}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}\left[w_{ij}^{(1)}x_j(t)+w_{ij}^{(2)}x_j(t-\tau)+T_{ij}^{(1)}h_j(x_j(t))+T_{ij}^{(2)}h_j(x_j(t-\tau))\right]\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

式中 $h_j(x_j)=f_j(x_j+u_j^*)-f_j(u_j^*)$。易知系统(3)的零解的稳定性对应于神经网络系统(1)的平衡点 $u=u^*$ 的稳定性。此时，系统(3)的初始条件为

$$x_i(t)=u_i(t)-u_i^*=\varphi_i(t)-u_i^*\qquad \forall t\in[t_0-\tau,t_0]\qquad i=1,2,\cdots,n$$

因 $\varphi_i(t)$ 是在 $[t_0-\tau,t_0]$ 上的连续函数，故 $\varphi_i(t)$ 在 $[t_0-\tau,t_0]$ 上有界，于是设

$$\|\varphi-u^*\|=\max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{-\tau\le\theta<0}\left|\varphi_i(t_0+\theta)-u_i^*\right|\right\}$$

定义 2　对于系统(3)，如果 $\exists\varepsilon>0$，$\exists M\ge 1$，当 $\|\varphi-u^*\|<k$ 时，有

$$|x_i(t)|\le M\|\varphi-u^*\|\exp[-t(t-t_0)]\qquad i=1,2,\cdots,n$$

对 $\forall t\ge t_0$ 成立，则称神经网络系统(1)的平衡点 $u=u^*$ 是全局 $k$-指数稳定的。

将系统(3)改写成矩阵形式为

$$C\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-R^{-1}x(t)+W^{(1)}x(t)+W^{(2)}x(t-\tau)+T^{(1)}h(x(t))+T^{(2)}h(x(t-\tau)) \tag{4}$$

其中 $C=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$R^{-1}=\mathrm{diag}(R_1^{-1},R_2^{-1},\cdots,R_n^{-1})$，$W^{(l)}=\left(w_{ij}^{(l)}\right)_{n\times n}$，$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^T$，$h(x)=[h_1(x_1),h_2(x_2),\cdots,h_n(x_n)]^T$，$T^{(l)}=\left(T_{ij}^{(l)}\right)_{n\times n}$ $(i,j=1,2,\cdots,n,l=1,2)$

## 2 主要结果

**定理 1**　对于系统(4)，如果满足：

1) $\exists\alpha>0$，$\exists M\ge 1$，使得 $\left\|\exp[C^{-1}(W^{(1)}-R^{-1})(t-t_0)]\right\|\le M\exp[-\alpha(t-t_0)]$；

2) $\|h(x)\|\le l\|x\|$，其中 $l\ge 0$ 为常数；

3) $M\|C^{-1}\|\left(l\|T^{(1)}\|+l\|T^{(2)}\|+\|W^{(2)}\|\right)<\alpha$；

则神经网络系统(1)的平衡点 $u=u^*$ 是全局指数稳定的。

当 $w_{ij}^{(1)}=0$、$w_{ij}^{(2)}=0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，神经网络系统(1)变为

$$\begin{cases}c_i\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{u_i(t)}{R_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[T_{ij}^{(1)}v_j(t)+T_{ij}^{(2)}v_j(t-\tau)\right]+I_i \\ v_i(t)=f_i(u_i(t))\end{cases}\qquad t\ge 0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

这是具有时滞的 Hopfield 型神经网络，于是有如下推论:

推论 1　对于具有时滞的 Hopfield 型神经网络(5)，如果满足

1) $\left\|\exp[-C^{-1}R^{-1})(t-t_0)]\right\|\le\exp[-\alpha(t-t_0)]$，其中 $\alpha=\min\limits_{1\le i\le n}\dfrac{1}{R_ic_i}$；

2) $\|h(x)\|\le l\|x\|$，其中 $l\ge 0$ 为常数；

3) $lM\|C^{-1}\|\left(\|T^{(1)}\|+\|T^{(2)}\|\right)<\alpha$；

则具有时滞的 Hopfield 型神经网络(5)的平衡点 $u=u^*$ 是全局指数稳定的。

**定理 2**　对于系统(3)，如果满足:

1) $|h_i(x_i)|\le|x_i|l_i(|x_i|)\quad i=1,2,\cdots,n$，其中 $l_i(\cdot)$ 是非负不减连续函数；

2) 若存在 $k>0$，使

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(1-\delta_{ij})\left|w_{ij}^{(1)}\right|+\left|w_{ij}^{(2)}\right|+\left(\left|T_{ij}^{(1)}\right|+\left|T_{ij}^{(2)}\right|\right)l_j(k)\right]<\frac{1}{R_i}-w_{ii}^{(1)}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$，则神经网络系统(1)的平衡点 $u=u^*$ 是全局 $k$-指数稳定的。

推论 2　对于具有时滞的 Hopfield 型神经网络(5)，如果满足:

1) $|h_i(x_i)|\le|x_i|l_i(|x_i|)$　$i=1,2,\cdots,n$，其中 $l_i(\cdot)$ 是非负不减连续函数;

2) 若存在 $k>0$，使得

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left|T_{ij}^{(1)}\right|+\left|T_{ij}^{(2)}\right|\right]l_j(k)<\frac{1}{R_i}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则具有时滞的 Hopfield 型神经网络(9)的平衡点 $u=u^*$ 是全局 $k$-指数稳定的。

当 $T_{ij}^{(2)}=0$、$w_{ij}^{(2)}=0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，神经网络系统(1)变为文献[6]研究的通有连续时间神经网络，此时有:

推论 3　对于通有连续时间神经网络，如果满足:

1) $|h_i(x_i)|\le|x_i|l_i(|x_i|)$　$i=1,2,\cdots,n$，其中 $l_i(\cdot)$ 是非负不减连续函数;

2) 若存在 $k>0$，使

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(1-\delta_{ij})\left|w_{ij}^{(1)}\right|+\left|T_{ij}^{(1)}\right|l_j(k)\right]<\frac{1}{R_i}-w_{ii}^{(1)}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$，则神经网络系统(1)的平衡点 $u=u^*$ 是全局 $k$-指数稳定的。

注 推论 3 是文献[1]的主要结论，所以，定理 2 推广了文献[1]的结果。

## 参 考 文 献


1 钟守铭, 李正良. 通有连续时间神经网络的稳定性. 电子科技大学学报, 1996, 25(1): 92~97

2 Hopfield J J. Neurons with Graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. Proc Nati Acad Sci USA, 1984, 81:3 088~3 092

3 Hunt K L, Sbarbaro D, Zbikowki R. Neural networks for control—a survey. Automatic, 1992, 28(6):1 083~1 112

4 Forti M, Manetti S, Marini M. A condition for global convergence of a class of symmetric neural networks circuit. IEEE Trans Circuits and Systems-I, 1992, 39(6):480~483

5 Kelly D G. Stability in contractive nonlinear neural networks. IEEE Trans Biomedical Engineering, 1990, 37: 231~242

6 Zhang Y, Zhong S M, Li Z L. Periodic solutions and stability of hopfield neural networks with variable delays. Int J Systems Sci 1996, 27(9): 859~901


# Stability of General Neural Network with Time-delay


Qiu Yalin

(Dept of Mathematics Longyan Teacher's College　Longyan　364000)



**Abstract**　In this paper, the problem of the stability for general neural network with time-delay is studied. By the method of variation of the parameters and the method of inequality analysis, the authors established sufficient conditions of the global exponential stability and the global k-exponential stability for general neural network with time-delay. the　conditions are obtained by extending the result of Ref. [1].



**Key words**　time-delay;　neural network;　the method of variation of the parameters;　stability