层次分析法中判断矩阵构造的新方法

骆正清*
（合肥工业大学管理学院 合肥 230009）

【摘要】 给出了判断矩阵构造的“差”法。基于上述构造的层次分析法，不需要检验一致性比例指标(C.R.)，并且在某些场合比 Satty 教授的直接“商”法对被比较对象反应更敏感、更有效。另外，从方法论的角度看，“差”法的引入增强了层次分析法的适应性。

关 键 词 判断矩阵；构造；商法；差法
中图分类号 N94

1 问题的提出

美国匹兹堡大学 Satty 教授于 70 年代初提出的层次分析法作为一种定性与定量相结合的决策工具，现已被广泛应用于许多决策领域。该方法自引入我国以来，有关学者对其做了很多改进和完善工作，并取得了一系列成果，如判断矩阵的改进及一致性检验问题，特征向量(权重)的求解，逆序问题等[1~7]。

Satty 教授层次分析法的核心之一是构造判断矩阵，而其构造的方法则是通过事物之间的两两直接比较 ——“商”（倍数关系）。用这种“商”法进行直接比较来构造判断矩阵对许多定性问题的讨论十分方便，对一些定量问题的分析也是可行的。然而，事物之间比较除了用“商”表示，还可以用“差”（等级差、增量关系）来表示，而且用“差”法在某些场合比“商”法更方便，对被比较对象之间的关系反应更敏感，并且还可以避免“商”法中因比较方法不同而可能产生不同的结果（其中一个可能为不正确）。

例 1 假定某三支水平较接近的女子蓝球队甲、乙、丙，由于技术上相克，在比赛中出现胜负连环套，比分如下，甲：乙=61：62； 乙：丙=62：63； 丙：甲=61：62。要求根据上述比分应用层次分析法排出甲、乙、丙三支队伍的名次。根据 Satty 直接“商”法的两两比较，有两种基本方法，第一种方法是用直接比分作为判断矩阵的元素，得到判断矩阵如表 1 所示。

表 1 “商”法求解例 1 得到的判断矩阵及权重（第一种方法）

C	甲	乙	丙	W_i	
甲	1	$\frac{61}{62}$	$\frac{62}{61}$	0.333 33	R.I.(3)=0.58 $\text{C.I.}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$ $n=3$ $\lambda_{\max}=3.000\ 26$ $\text{C.R.}=\frac{\text{C.I.}}{\text{R.I.}}=0.000\ 22<0.1$
乙	1	$\frac{62}{61}$	$\frac{62}{63}$	0.333 36	
丙	1	$\frac{61}{62}$	$\frac{63}{62}$	0.333 31	

从表 1 的计算结果可以得到排序结果为乙、甲、丙，但实际情况看甲、乙、丙的实力在伯仲之间，若要排名也只能是并列第一，故第一种方法对例 1 不可行。

下面再看 Satty“商”法的第二种方法，即九标度法。根据心理学上韦伯感觉阈限定律，人们对事物的判断具有一定的阈限，即事物的相对变化较小时，人们无法感知即认为相同。上述三队之间的实力相对差分别为 1/61，1/62，−1/61（绝对值均较小），故可判为相等（事实上，若不判为相

1999年1月27日收稿
* 男 35岁 博士 副教授

等，求出的 C.R 大于 0.1，需重新调整判断矩阵，而调整后将与表 2 相同，例 2 亦然），得判断矩阵如表 2 所示。

表 2 "商"法求解例 1 得到的判断矩阵及权重（第二种方法）

<table>
<tr><td>C</td><td>甲</td><td>乙</td><td>丙</td><td>W_i</td><td rowspan="4">R.I.(3)=0.58
$\text{C.I.}=\dfrac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$
$n=3$
$\lambda_{\max}=3.000\ 00$
$\text{C.R.}=\dfrac{\text{C.I.}}{\text{R.I.}}=0<0.1$</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.333 33</td></tr>
<tr><td>乙</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.333 33</td></tr>
<tr><td>丙</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0.333 33</td></tr>
</table>

由表 2 的计算结果可知，甲、乙、丙的权重相同，故并列第一。显然，用第二种方法得出的结论是正确的。然而上述计算总使人感到有点欠缺，因为按照蓝球比赛的规则，甲、乙、丙三支球队的正负分之和为零，因此应是精确相等，而上述判断却是通过相当才能得出相同。如果说例 1 用"相当"还能得出正确结论的话，那么对于例 2 将难以得出正确的结论。

例 2 其他说明同例 1，只是三队的比分改为：甲：乙=61：62；乙：丙=62：63；丙：甲=61：63，要求对三支队伍进行重新排序。

现仍然用 Satty 的直接比较的两种方法来解例 2。先用第一种方法，计算结果如表 3 所示。

表 3 "商"法求解例 2 得到的判断矩阵及权重（第一种方法）

<table>
<tr><td>C</td><td>甲</td><td>乙</td><td>丙</td><td>W_i</td><td rowspan="4">R.I.(3)=0.58
$\text{C.I.}=\dfrac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$
$n=3$
$\lambda_{\max}=3.000\ 46$
$\text{C.R.}=\dfrac{\text{C.I.}}{\text{R.I.}}=0.000\ 40<0.1$</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>1</td><td>$\frac{61}{62}$</td><td>$\frac{63}{61}$</td><td>0.335 11</td></tr>
<tr><td>乙</td><td>1</td><td>$\frac{62}{61}$</td><td>$\frac{62}{63}$</td><td>0.333 36</td></tr>
<tr><td>丙</td><td>1</td><td>$\frac{61}{63}$</td><td>$\frac{63}{62}$</td><td>0.331 53</td></tr>
</table>

由表 3 可知，三个队的排序为甲、乙、丙。显然用第一方法的排序结果是正确的。

再用第二种方法——九标度法，根据心理学上韦伯阈限定律，三队之间的实力相对之差分别为 1/61，1/62，−2/61（绝对值均较小），用九标度法三者仍被判为实力相当（计算结果同表 2），因而得到三者的排序为并列第一，显然用第二种方法结论不正确。

由例 1 和例 2 计算可知，利用 Satty 教授直接"商"的比较，两种方法往往会得出不同的结论。为此，自然可以想到，事物之间的比较既可用"商"法，也可以用"差"法。基于这种思考，本文将采用"差"法先构造相对比较矩阵，然后再构造判断矩阵，并利用特征向量法求权重。

2 判断矩阵构造的"差"法

为了讨论方便，假定仅有一个决策准则 C。设对某一决策问题 D，有一决策准则 C，n 个被比较对象为 A_i，首先用"差"法构造比较矩阵 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n} \qquad b_{ij}=b_i-b_j \qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

式中 b_i、b_j 为被比较对象 A_i 和 A_j 的定量描述，则 b_{ij} 具有如下性质：

i）$b_{ij}=0$，当 $i=j$ 时，$i,j=1,2,\cdots,n$；

ii）$b_{ij}=-b_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$；

iii）$b_{ij}=b_{ik}-b_{kj}$，$i,j=1,2,\cdots,n$；$i\leqslant k\leqslant j$。

1) 比较矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可通过下列两种方法构造，(1) 先确定被比较对象 b_i 等级（用数字表示），再利用“差”构造 b_{ij}；(2) 直接根据主观判断确定 b_{ij}。其中，第一种方法构造出的 b_{ij} 具有传递性，故后面的 a_{ij} 也具有传递性，因而不需要检验一致性指标 C.R.。而第二种方法往往难以保证 b_{ij} 具有传递性，故在构造过程中需检验其是否满足传递性要求，但也不需要检验一致性指标 C.R.。

2) 在构造比较矩阵时，应使 b_{ij} 不致过大（这个要求总是可以做到的），否则后面的 $e^{b_{ij}}$ 太大，会给计算带来不便。然后根据比较矩阵的互反性，利用指数函数 e^x 构造判断矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\qquad a_{ij}=e^{b_{ij}}\qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

3） 式(2)中指数的底也可以取大于 1 的任意一数。取 e 为底，是为了计算上的方便。则 a_{ij} 具有下列性质：

i） $a_{ij}=0$，当 $i=j$ 时；

ii） $a_{ij}>0$，$i,j=1,2,\cdots,n$；

iii）$a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}$，$i,j=1,2,\cdots,n$；

iv） $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$，$i,j=1,2,\cdots,n$；$i\leqslant k\leqslant j$；

上述三条性质满足 Satty 判断矩阵的非负性、互逆性、传递性要求，故可利用特征根法求权重。容易证明，较大的 b_i 对应于特征向量中的较大的分量。因此，“差”法也具有保序性。

3 案例分析

首先对例 1 应用“差”法，构造比较矩阵 $\boldsymbol{B}$，得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{3}$$

根据指数变换，得判断矩阵及权重如表 4 所示。

表 4 “差”法求解例 1 得到的判断矩阵及权重

C	甲	乙	丙	W_i
甲	1	e^{-1}	e	0.333 33
乙	e	1	e^{-1}	0.333 33
丙	e^{-1}	e	1	0.333 33

表 5 “差”法求解例 2 得到的判断矩阵及权重

C	甲	乙	丙	W_i
甲	1	e^{-1}	e^2	0.448 44
乙	e	1	e^{-1}	0.321 32
丙	e^{-2}	E	1	0.230 24

由表 4 中的权重可知，甲、乙、丙三队并列第一，计算结果符合一般规则。

下面对例 2 应用“差”法重新计算。先构造比较矩阵 $\boldsymbol{B}$，得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

根据指数变换，得判断矩阵及权重如表 5 所示。由表 5 可得排序结果为：甲、乙、丙。很显然，用“差”法所得排序符合通常规则。

表6 甲、乙、丙三者成绩

	政治	数学	体育
甲	80~86	90~95	60~66
乙	93~97	81~85	84~89
丙	72~78	85~88	83~87

表7 准则 C_1（德育）下的判断矩阵及权重

C_1	甲	乙	丙	W_{1i}
甲	1	e^{-1}	e^{2}	0.259 50
乙	e	1	e^{3}	0.705 38
丙	e^{-2}	e^{-3}	1	0.035 12

从例1、例2的计算结果可以看出，用“差”法不仅可以得出正确排序，而且还可以避免“商”法中因判断矩阵构造方法不同而可能产生排序不同。为了更好地说明“差”法，再给出例3的求解过程。

例3 某高校对学生进行德、智、体三个方面综合评价，其中，德育占30%；智育占60%；体育占10%。已知甲、乙、丙三位同学近年来德、智、体的成绩如表6所示（假定用政治、数学、体育三门课表示），试用本文所给的“差”法对上述三位同学进行综合排序。

解 首先需对德、智、体三方面构造等级，构造方法如下，令德、智、体的得分为 s，对应等级为 b，则

$$b=\frac{[s]}{10}+1 \tag{5}$$

利用式(5)，分别确定甲、乙、丙在三个准则下的等级如下：对于准则 C_1（德育），$b_1=9$，$b_2=10$，$b_3=7$；对于准则 C_2（智育），$b'_1=10$，$b'_2=9$，$b'_3=9$；对于准则 C_3（体育），$b''_1=8, b''_2=9, b''_3=9$；

根据甲、乙、丙在德、智、体三个准则下得分等级，利用式(1)中 $b_{ij}=b_i-b_{ij}$ 构造比较矩阵（略）。其数值为对应表7~9中指数的幂，经指数变换得构造准则 C_1、准则 C_2、准则 C_3 下的判断矩阵如表7~9所示。

表8 准则 C_2（德育）下的判断矩阵及权重

C_2	甲	乙	丙	W_{2i}
甲	1	e	e	0.576 12
乙	e^{-1}	1	1	0.211 94
丙	e^{-1}	1	1	0.211 94

表9 准则 C_3（德育）下的判断矩阵及权重

C_1	甲	乙	丙	W_{3i}
甲	1	e^{-1}	e^{-1}	0.155 44
乙	e	1	1	0.422 02
丙	e	e	1	0.422 54

利用表7~9中的数据，分别计算甲、乙、丙三位同学综合测评的权重 W_1、W_2、W_3 为：$W_1=0.3W_{11}+0.6W_{21}+0.1W_{31}=0.439\ 07$; $W_2=0.3W_{12}+0.6W_{22}+0.1W_{32}=0.380\ 98$; $W_3=0.3W_{13}+0.6W_{23}+0.1W_{33}=0.179\ 95$。

由计算结果可知，甲、乙、丙三同学的综合排名为：甲（第一）、乙（第二）、丙（第三）。

例3中的比较矩阵也可以由判断者依据被比较对象之间的分数差直接给出。

4 结束语

本文研究表明：1）对于事物之间差别较小或事物之间不具有传递性（如循环套问题）的排序问题，Satty 教授直接“商”法往往难以得出正确的结论；2）通过“差”法，给出的构造判断矩阵的新方法不仅适用于定性问题的排序，而且也适用于定量的排序，并且对 1）中的排序问题较 Satty 教授的直接“商”法更有效；3）“差”法不需象“商”法那样要检验一致性指标 C.R.，必要时只需检验比较矩阵中 b_{ij} 是否具有传递性，故“差”法较“商”法更方便。

参考文献

1 左　军. 层次分析法中判断矩阵的间接给出法. 系统工程, 1988, (6):56~63

2 卢宗华. 层次分析法中判断矩阵构造方法的改进. 系统工程, 1990, (1):43~48

3 杨永清、许先云.混合群 AHP 方法判断矩阵的构造及应用. 系统工程，1994, (3):68~74

4 王懋赞、刘民超. 如何增加层次分析法中判断矩阵的一致性. 系统工程理论与实践，1993, (1):62~63

5 魏毅强、刘进生. 不确定型 AHP 中判断矩阵的一致性概念及权重. 系统工程理论与实践, 1994,(7):17~22

6 王莲芬. 梯度特征向量排序法的推导与改进. 系统工程理论与实践, 1988, (5):17~21

7 梁　梁、佘　磊. 对一种改进的 AHP 法的补注. 系统工程, 1991, (3):64~65

8 邓宇镌. 判断矩阵权重向量的拉格朗日解. 系统工程, 1995, (2):21~23

9 雷功炎. 关于将相对熵用于层次分析法的简单注记. 系统工程理论与实践, 1995, (3):65~68

10 吴　江. AHP 用于方案选择时的逆序问题. 系统工程理论与实践, 1990, (5):49~52

11 王莲芬、朱枫涛. AHP 中逆序问题的综述. 系统工程理论与实践, 1994, (11):1~6

12 骆正清. 层次分析法中逆序问题与其决策环境研究. 电子科技大学学报, 1996, (3):325~329

A New Method for Construction of Judgement Matrix in AHP

Luo Zhengqing

(Department of Management, Hefei University of Technology　Hefei　230009)

Abstract　In this paper, a new method (Difference method) for constructing judgement matrix is presented. Based on the above construction, it is unnecessary to check the consistency ratio while applying AHP (the Analytic Hierarchy Process) to order, and AHP is more effectual and more sensitive compared with Satty's direct comparative method (Quotient method) on some special occasions. Besides, from the view of methodology, Difference method also enhances the adaptability of AHP.

Key words　judgement matrix ;　construction;　quotient;　difference