

垄断产品的质量与价格分析*

胡知能**

唐小我

(四川大学信息与决策研究所 成都 610065) (电子科技大学管理学院 成都 610054)

徐玖平

(四川大学信息与决策研究所 成都 610065)

【摘要】 由社会角度应用最优控制理论考察了垄断商品的质量选择与定价行为, 分析了政府的干涉行为对社会福利的影响, 指出可确定垄断产品对质量与价格水平的几何特性, 并对质量与价格的动力学性质作了分析。

关键词 垄断产品; 价格; 质量; 最优控制

中图分类号 F016

1 模型的建立

生产系统的功能之一是选择所要生产和销售的商品, 这种选择涉及现实的生产选择。我们考虑垄断者在一个产品空间中进行选择, 假定垄断者生产一种商品, 对此选择是很多的。由于人们的偏爱不同, 比如产品的颜色、产品对地方的适用性等, 对于垄断者所提供的某些特性最优选择(给定价格相同)与特定消费者相关。在这些横向差异的情形下, 不存在可处理的“好”与“坏”的区别, 然而大多数特性组合是一致的, 即偏好是一致的。在价格相等的条件下, 关于特性空间, 有一种自然的排序, 其中比较典型的因素是质量。我们设产品质量为 $s=s(t)$ (在 Dorfman 与 Steiner 关于广告水平与价格的文献中, s 是广告水平^[1]; 在 Swan 最优耐用性定理中, s 是商品的耐用性^[2])。在不考虑通货膨胀的影响下, 设产品价格为 $p=p(t)$, 则消费者需求量为

$$q=q(t)=D(p,s) \tag{1}$$

垄断生产者在时期 t 有固定的成本 $c=c(q, s)$ (假定 $c>0$, $\partial c/\partial q>0$, $\partial c/\partial s>0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)>0$), 如果产

品成本具有规模不变的性质, 则 $c(q, s)=c(s)q$ 。令 $x=x(t) \in [0,1]$ 为产品被再循环的比例(假定再循环利润归于再循环产业^[3])。因此在初级垄断市场上, 政府会采取一种可能恢复社会最优的政策规定, 比如以税率 ω 向垄断产出征税, 则垄断者的利润为

$$\pi_t=(p-c)(q-xq)=(1-x)[p-c(s)]D(p+\omega, s) \tag{2}$$

对于提供质量的刺激是与消费者对质量的边际支付意愿相关的, 在独家垄断的场合是边际消费者; 在社会计划者的场合则是平均的消费。质量的变化反映在价格水平上, 可表示为

$$\frac{ds/dt}{s} = \phi(p-p_0+\omega) \tag{3}$$

式中 $\phi(0)=0$, $\phi_p>0$, p_0 是政府相关的社会计划者的价格。

由文献[4], 其社会目标函数可表示为消费者剩余与垄断利润之和, 即

$$W(q, s)=W[q(t), s(t)] = U+\pi_t=U+(1-x)[p-c(s)]D(p+\omega, s) \tag{4}$$

式中 U 是消费者的效用函数。

下面假设消费者有相同的序偏好, 仅仅是收入不同^[5], I 是消费者的收入, $v'>0$, 即 v 是 s 的递增函数, 可设 $v(s)$ 的最简单情形为 $v(s)=s$ 。又假定在该特定商品的支出上对于收入来说是很小的, 即 $p \ll I$ 时, 则消费者效用函数为

1999年8月15日收稿

• 国家杰出青年科学基金资助项目, 基金号: 79725002

** 男 25岁 硕士

$$U \begin{cases} = u(I - p - \omega) + v(s) \\ \approx -u'(I)(p + \omega) + v(s) = s - [(p + \omega)/\theta] \\ = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{如果购买质量为 } s, \text{ 价格为 } p \text{ 的商品} \\ \text{如果不购买商品} \end{array}$$

其中 $\theta = 1/u'(I)$ 表示消费者的消费参数(或偏好参数)。显然, 如果 U 是凹的, 收入较高的消费者就有较低的 $u'(I)$, 因而有较高的 θ 。如果给定一个价格, 所有的消费都喜欢高的质量。但是, 具有高 θ 的消费者更愿意为获得高质量而花更多的钱。根据大量的消费统计特性, 我们可假定偏好参数的分布密度函数是 $f(\theta)$, 相应于区间 $[0, +\infty]$ 的累积分布函数为 $F(\theta)$, 其中 $F(0)=0, F(+\infty)=1$, 因此 $F(\theta)$ 就是偏好参数小于 θ 的消费者的比例。由于消费者具有理性消费行为, 所以对该商品的需求等于偏好参数 θ , 且满足 $\theta s \geq p + \omega$ 的消费者数量, 即式(1)变为

$$q = D(p + \omega, s) = 1 - F[p + \omega/s]$$

所以式(4)变为

$$W(q, s) = v(s) - [(p + \omega)/\theta] + (1-x)(p - c(s))D$$

则从现在到将来的社会目标总值为

$$\int_0^{\infty} W(q, s) \exp(-\rho t) dt \quad (5)$$

其中 ρ 为中央银行的再贴现率。

2 模型的分析

根据动态优化理论^[5], 对式(5)引入 Hamilton 函数

$$H = H(p, s, \lambda) = W(q, s) + \lambda s \phi \quad (6)$$

则一次最优条件为

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 = \frac{\partial W(q, s)}{\partial p} + \lambda s \phi_p \quad (7)$$

$$\dot{\lambda} = (p - \phi)\lambda - \frac{\partial W(q, s)}{\partial s} \quad (8)$$

命题 1 若给定中央银行再贴现率 ρ 与商品再循环比例 x , 则最优价格 p 、质量水平 s 与政府税率 ω 须满足

$$\frac{\partial W(q, s)}{\partial p} \frac{p - \phi}{s \phi_p} + \frac{\partial W(q, s)}{\partial s} = 0 \quad (9)$$

证明 根据最优控制理论^[5], 由式(7)和式(8)直接得出结论。由式(9)可得

$$\frac{\partial W(q, s)/\partial s}{\partial W(q, s)/\partial p} = \frac{\partial W(D(p + \omega, s), s)/\partial s}{\partial W(D(p + \omega, s), s)/\partial p} = \frac{\phi - \rho}{\phi_p s} \quad (10)$$

在式(4)中对价格水平 p 求导知 $\partial W(q, s)/\partial p \leq 0$, 即社会福利对于价格来说是非递增的, 由式(10)可得

$$\frac{\partial W(q, s)}{\partial s} = \frac{(\phi - \rho)}{\phi_p s} \frac{\partial W(q, s)}{\partial p} \quad (11)$$

如果考虑质量变化与价格变化的关系, 则从社会角度看, 垄断者的质量选择与 ϕ 函数有关, 若

$$\phi(p + \omega - p_0) \leq \rho \quad (12)$$

则垄断者的质量改进选择对社会来说是最优的。为保证式(12)成立, 政府对产出所征税率不能太高, 这是因为垄断者产品价格一般是大于 p_0 , 即 $\omega \leq \phi^{-1}(\rho) + p_0 - p$ 。事实上, 政府征税后会进一步抬高垄断零售价格水平, 为了使消费者消费更多的商品, 垄断者只有提高垄断产品的质量, 从而促使质量改进来达到对社会的最优抉择。这种导致质量提高的政策如果没有引起垄断者缩减产出(因为垄断者增加产出对社会是一件好事), 则质量的提高就具有社会合意性。社会福利关于质量的导数与福利关于价格的导数有关, 因此社会福利依赖于消费者效用或者个人的边际支付意愿总和。但在垄断

者只关心边际个人的支付意愿时, 由式(4)与式(10)可知, 如果这个值不同, 从社会角度看垄断生产者的质量选择不是最优的。

考察价格水平 p 与质量水平的动态性质时, 由式(7)与式(8)可推出

$$(MI) \quad \begin{cases} \frac{ds}{dt} = s\phi \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\left[\phi \frac{\partial W}{\partial p} + (\rho - \phi + s\phi_p) \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\phi s \partial^2 W}{\partial p \partial s} \right] \phi_p}{(\phi_p \partial^2 W / \partial p^2) - (\phi_{pp} \partial W / \partial p)} \end{cases} \quad (13)$$

命题 2 在关于垄断产品动力学系统(MI)中, 状态变量价格水平 p 与质量水平 s 处于均衡状态时, 有

$$p = p_0 - \omega \quad (14)$$

$$\frac{s\phi \partial^2 W}{\partial p \partial s} = \frac{\phi \partial W}{\partial p} + (\rho - \phi + s\phi_p) \frac{\partial W}{\partial s} \quad (15)$$

证明 可由式(13)直接得出结论。

从命题 2 可以看出, 由于 p_0 是社会计划者所希望的垄断产品价格, 而垄断价格实际上处在高于价格水平 p_0 的状态中, 所以在均衡时, 政府向垄断产出所征税率 $\omega < 0$, 即政府须给垄断者的产出给予补贴。事实上, 垄断定价通常是处于太高的水平而导致消费者消费更多的产品。为了对社会资源进行有效配置, 只有对商品给予补贴, 从而引导消费者更多地消费产品。

如果忽略垄断产品的再循环产出, 则由式(11)与式(13)可得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p^2} = \left[\frac{\phi_p^2 - \phi_{pp}\phi}{(\rho - \phi)\phi_p} + \frac{\rho - \phi + s\phi_p}{s\phi} \right] \frac{\partial W}{\partial p}$$

由此可得到社会福利关于价格水平的一阶与二阶导数的正负性, 可确定福利关于价格水平 p 的几何特性。再由式(11)与式(14)类似地得到了社会福利关于价格水平的一阶与二阶导数的正负性, 确定了社会福利关于质量水平的几何特性和社会福利关于价格水平与质量水平的几何特性。

命题 3 当函数 ϕ 是线性函数并且在忽略再循环时, 则由需求对质量的变化而引起垄断者的利润变化为相应的成本变动减去消费者对质量的边际效用那一部分。

分析 在不影响模型本质的前提下, 当考虑函数 ϕ 是线性时, ϕ_p 是一个正的常数, 则动力学系统(MI)均衡态为 $(s_0, p_0 - \omega)$, 其中 s_0 满足方程

$$v'(s) + (1-x) \left[\frac{\partial D}{\partial s} (p - c(s)) - Dc'(s) \right] = 0$$

故有 $(p - c) \frac{\partial D}{\partial s} = Dc'(s) - [v'(s) / (1-x)]$

由于动力学系统(MI)与特定的消费者偏好分布有关, 对于不同的分布函数, 如正态分布、指数分布、均匀分布等, 选择较简单的均匀分布来讨论, 这是由于价格与质量(或服务)具有可比性不是偶然的。极端的情形是服务(或质量)和价格折扣的完全替代品, 有意义的和一般的情形是质量(或服务)和价格折扣属不完全替代品。因此设

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ_1 是收入最低的消费者的偏好参数, θ_2 为收入最高的消费者的偏好参数, 所以

$$q = \begin{cases} 1 & (p+\omega)/s \leq \theta_1 \\ 1 - F((p+\omega)/s) & \theta_1 < (p+\omega)/s < \theta_2 \\ 0 & \theta_2 \leq (p+\omega)/s \end{cases} \quad (16)$$

式(16)的经济含义是消费者的需求量同价格与质量的相对变化有关。在政府对产出征税的情形下,质量与税后商品价格之比大于有最低收入类的消费者收入的边际效用,若需求量最大,标准化即为1;如果质量与税后商品价格之比小于有最高收入类的消费者收入的边际效用,则需求量为零。事实上,对于有最高收入类的消费者来说,质量与税后商品价格低于他们的边际支付意愿,就没有消费者愿意为这类高价商品(比起相应的质量来说)而花钱,因此垄断者不能过高地抬高价格,使 $(p+\omega)/s > \theta_2$,否则垄断者只能得到零利润。当然垄断者希望消费者的需求量为最大,这时所有的消费者会完全乐意地消费垄断商品。但是由于最低的价格至多等于产品成本,而不能低于产品成本,则由于消费者最低收入 I 趋近于零(或相当小的一个数),从而 $u'(I)$ 相当大。因此可设销售给 θ_1 类最低收入的消费者对应的价格为 p_1 ,质量为 s_1 , p 为其他质量等级 s 的商品价格(即满足 $\theta_1 < (p+\omega)/s < \theta_2$),垄断者的利润相比,有

$$\pi(p_1, s_1) - \pi(p, s) = [p_1 - c(s_1)] - [p - c(s)] \{1 - F[(p+\omega)/s]\} < 0$$

所以垄断者商品选取的价格和质量满足

$$\theta_1 < \frac{p+\omega}{s} < \theta_2$$

这时消费者的需求量为

$$q = D(p+\omega, s) = 1 - \frac{[(p+\omega)/s] - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

所以动力学系统(MI)均衡态为 $(s_0, p_0 - \omega)$,其中 s_0 满足方程

$$p_0[p_0 - c(s_0) - \omega] = (\theta_2 - \theta_1) \left[Dc'(s_0) - \frac{Dc'(s_0) - v'(s_0)}{1-x} \right] s_0^2$$

相应的线性化矩阵为

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \phi_p s_0 \\ X & Y \end{vmatrix}$$

$$\text{其中 } X = \frac{1}{2}(\rho + s_0 \phi_p) \left\{ \frac{[s_0 + 2(p_0 - \omega - c(s_0))]p_0}{s_0^2} - p_0 s_0 [p_0 - c(s_0) - \omega] c''(s_0) \right\}$$

$$Y = \frac{s_0(\theta_2 - \theta_1)\phi_p}{2\theta(1-x)} - \frac{1}{2}[p_0 - \omega - c(s_0)]\phi_p(s_0 p_0 - 1) - \frac{\rho}{2s_0}[2p_0 - \omega - c(s_0) + c'(s_0)s_0]$$

于是特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 + 4\phi_p s_0 X}}{2}$$

则具体的特征值与垄断产品的成本结构有关。当考虑商品成本是质量的递增形时,可简单地设为 $c(s) = s$ 。这时由于政府对商品征税的税率实际是一个很小正数,而商品的价格一直为正,可知

$$X = (\rho + s_0 \phi_p) \left(p_0 - \omega - \frac{1}{2}s \right) \quad \frac{p_0}{s_0^2} > 0$$

且 $Y \geq 0$
从而有

$$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0$$

由实际的经济含义知系统(MI)的不稳定空间和稳定空间分别为

$$E^u = \{ (s, p) \in R^2 \mid p = p_0 - \omega \} \quad (17)$$

$$E^s = \{ (s, p) \in R^2 \mid s = s_0 \} \quad (18)$$

式(17)与式(18)的经济含义是在价格与质量处于均衡态时,质量在一定的时期内具有稳定性;而价格则不可能停留在均衡态上。事实上,由于政府的干预行为也导致了价格的变化具有经常性。正因为价格具有不稳定性,在垄断者追求高额利润的动力下,质量也逐步得到了改进与提高。在垄断者推出高质量商品类型时,初期内可由高价获得高额垄断利润,但随着时间的推移,因为商品具有一定的耐用性,消费者的需求在下降,从而利润会逐步减少,但垄断者不可能以加价的方式来保持高额垄断利润的获取。这样垄断者只有推出更高质量的品种来刺激消费者的购买欲望,使得在低质量的商品还可继续使用的前提下,大多数的消费者会追求更高质量的消费商品,从而垄断者能在新一轮产品销售中获得高额的利润。

参 考 文 献

- 1 Dorfman R, Steiner P. Optimal advertising and optimal quality. *American Economic Review*, 1954, 44: 826~836
- 2 Swan P. Market structure and technological progress: the influence of monopoly on product innovation. *Quarterly Journal of Economics*, 1970, 84: 627~638
- 3 Martin R. Monopoly power and the recycling of raw materials. *Journal of Industrial Economics*, 1982, 30: 405~419
- 4 Spence M. Monopoly, quality and regulation. *Bell Journal of Economics*, 1975, 6(2): 417~429
- 5 Hicks J. *A revision of demand theory*. London: Oxford University Press, 1956
- 6 Sethi Suresh P, Thompson Gerald L. *Optimal control theory*. London: Oxford University Press, 1981: 147~151

Analysis of Quality and Price of Monopoly Goods

Hu Zhineng

(Institute of Information & Decision-Making, Sichuan University Chengdu 610065)

Tang Xiaowo

(Management College, UEST of China Chengdu 610054)

Xu Jiuping

(Institute of Information & Decision-Making, Sichuan University Chengdu 610065)

Abstract In this paper, quality selection and price-making of monopoly goods are analyzed based on the optimal control theory from social viewpoint. The impact of government intervention on social welfare is discussed. It is possible to induce geometric property of monopoly goods with respect to quality and price level. The dynamical properties of quality and price of goods are investigated.

Key words monopoly goods; price; quality; optimal control