

# 库仑磁作用定律的证明和局限性分析

乔生炳\*

(西南工学院基础科学系 四川绵阳 621002)

**【摘要】** 根据安培分子电流学说,用密绕通电的细螺线管建立了理想点磁极的物理模型,获得了点磁极磁荷量与螺线管单位长磁矩的关系。通过对点磁极间相互作用的分析,证明了在理想条件下库仑磁作用定律只对直线型通电细螺线管才成立。效仿理想点磁极的物理模型,对实际磁针建立了分子电流细螺线的物理模型,并分析了库仑磁作用定律成立的条件。

**关键词** 磁荷; 库仑磁作用定律; 分子电流; 理想点磁极

**中图分类号** O 441.2

点磁极间库仑磁作用定律的形式,在SI制中可表示如下

$$F = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} r \quad (1)$$

式中  $\mu$  为点磁极周围充满磁场的均匀磁介质的磁导率;  $m_1$ 、 $m_2$  为两个点磁极的磁荷量,北磁极的磁荷为正,南磁极的磁荷为负,单位为韦伯(wb);  $r$  为点磁极  $m_1$  和  $m_2$  连线上的单位矢量。

## 1 模型

任何沿长度方向均匀磁化的针状永磁体两端便形成了所谓的点磁极,根据安培分子电流学说,把放入条形介质空腔中的细长密绕通电螺线管作为理想磁针的物理模型是恰当的。为了便于分析和证明,把两个理想点磁极的相互作用分为通电的细长螺线管在外磁场中的受力规律和激磁规律,再将其结合起来。

## 2 规律

### 2.1 受力规律

如图1所示,管轴形状任意的密绕通电螺线管  $ab$  单位长的匝数为  $n$ , 每匝电流为  $I$ , 处于任意稳恒磁场  $B = B(r)$  中,则该螺线电流所受的安培力为

$$F = \int I dr \times B \quad (2)$$

把密绕的螺线电流近似处理成垂直于管轴密排的圆电流,则式(2)的积分可简化为

$$F = \int_a^b \left( \oint_L dr \times B \right) n I dl_c \quad (3)$$

式中  $dl_c$  为沿管轴长度的微分,对括号中的闭合路径积分可分解成直角坐标分量进行,即

$$F = \int_a^b n I dl_c \left[ \oint (B_z dy - B_y dz) i + \oint (B_x dz - B_z dx) j + \oint (B_y dx - B_x dy) k \right] \quad (4)$$

根据平面斯托克斯定理和  $B$  的散度定理,有

$$\oint (P dx + Q dy) = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (5)$$

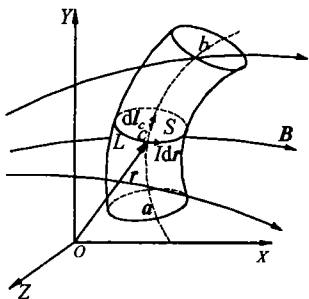


图1 受力规律推导用图

$$\nabla B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$\oint (B_y dx - B_x dy) = \iint \left( -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dx dy = \iint \frac{\partial B_z}{\partial z} dx dy \quad (7)$$

同理，还可以得到

$$\oint (B_x dz - B_z dx) = \iint \frac{\partial B_y}{\partial y} dx dz \quad \oint (B_z dy - B_y dz) = \iint \frac{\partial B_x}{\partial x} dy dz$$

再设  $dy dz = dS_x$ ,  $dz dx = dS_y$ ,  $dx dy = dS_z$ , 这样式(4)变为

$$F = \int_a^b n I dl_c \left[ \left( \iint \frac{\partial B_x}{\partial x} dS_x \right) i + \left( \iint \frac{\partial B_y}{\partial y} dS_y \right) j + \left( \iint \frac{\partial B_z}{\partial z} dS_z \right) k \right] \quad (8)$$

设管轴上任一点  $C$  沿积分方向的余弦为  $\cos \alpha_c$ 、 $\cos \beta_c$ 、 $\cos \gamma_c$ , 则  $dx = dl_c \cos \alpha_c$ , 而  $dS_x = dS \cos \alpha_c$ , 于是  $dl_c dS_x = dx dS$ . 同理, 也有  $dl_c dS_y = dy dS$  和  $dl_c dS_z = dz dS$ . 考虑到对均匀螺线管  $dS$  和  $dl$  积分是相互独立的, 顺序可以互换, 于是有

$$F = \iint n I dS \left[ \left( \int_a^b \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \right) i + \left( \int_a^b \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \right) j + \left( \int_a^b \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \right) k \right] \quad (9)$$

令  $n I dS = dP_m$ , 并设螺线管足够细,  $ab$  两端面的磁感应强度近似为恒量  $B_a$  和  $B_b$ , 则式(9)积分为

$$F = \iint (B_b - B_a) dP_m \approx B_b P_m - B_a P_m \quad (10)$$

式中  $P_m$  数值上等于单位长通电螺线管的磁矩。将上述分析用于理想磁针的物理模型, 由于条形介质空腔中的磁感应强度为介质中磁感应强度  $B$  的  $1/\mu_r$  [1], 考虑到磁场强度  $H = B/\mu_0 \mu_r$ , 令  $m = \mu_0 P_m$  为磁荷量, 则点磁极受力为

$$F = mH \quad (11)$$

## 2.2 激磁规律

激磁规律如图 2 所示, 管轴形状任意的细长通电螺线管激发的磁场可参照上面所使用的近似方法, 用毕-萨定律计算如下

$$B = \int_L \frac{\mu I dl \times r_p}{4\pi r_p^3} = \int_a^b n I dl_c \left( \oint \frac{\mu dl \times r_p}{4\pi r_p^3} \right) \quad (12)$$

式中  $r_p$  和  $r_c$  分别为电流元指向研究点  $P$  的矢量和研究点  $P$  指向圆电流平面与管轴交点  $c$  的矢量。由于  $r_p \approx r_c$ , 故式(12)可简化为

$$B = \int_a^b \frac{\mu n I \oint dl \times r_p}{4\pi r_c^3} dl_c \quad (13)$$

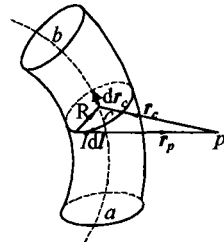


图 2 激磁规律推导用图

设电流元指向  $c$  点的矢量为  $R$ , 则有  $r_p = R - r_c$ . 将其代入式(13)的闭积分中, 得

$$\oint dl \times r_p = \oint dl \times R - \left( \oint dl \right) \times r_c = \oint dl \times R = 2S \quad (14)$$

式中  $S$  为闭积分圆环面的面积矢量。考虑到  $dl_c = dr_c$ , 故  $S dl_c = S dr_c$ . 设  $n I S = P_m$ , 式(13)变为

$$B = \int_a^b \frac{\mu P_m dr_c}{2\pi r_c^3} \quad (15)$$

设管轴指向研究点的矢量为  $r = -r_c$ , 于是对式(15)进行两次分部积分并整理, 可得

$$B = \left[ -\frac{\mu P_m r_c}{4\pi r_c^3} \right]_a^b + \int_a^b \frac{3\mu P_m}{4\pi r_c^2} d\left(\frac{r_c}{r_c}\right) \quad (16)$$

将  $r_c$  换成  $r$ , 得

$$B = \frac{\mu P_m}{4\pi} \left( \frac{r_b}{r_b^2} - \frac{r_a}{r_a^2} \right) - \int_a^b \frac{3\mu P_m}{4\pi r^2} dr \quad (17)$$

根据理想磁针的物理模型, 相当于长条形介质空腔中的螺线管, 在介质中激发的磁感应强度为  $B/\mu$ , 而磁场强度为  $H=(B/\mu)/\mu$ 。仍然设  $m=\mu_0 P_m$ , 则考虑到对直线型磁针,  $d\mathbf{r}=0$ , 故式(17)变为

$$H = \frac{m}{4\pi\mu} \left( \frac{\mathbf{r}_b}{r_b^2} - \frac{\mathbf{r}_a}{r_a^2} \right) \quad (18)$$

式中  $\mathbf{r}_a$  和  $\mathbf{r}_b$  分别为螺线管两端指向研究点的单位矢量。

### 3 局 限

将式(11)与式(18)结合起来, 设两个细长螺线管管口的等效磁量分别为  $m_1$  和  $m_2$ , 其间的距离为  $r$ , 单位矢量为  $\mathbf{r}$ , 则相互作用力为

$$F = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r} \quad (19)$$

实际磁针的两端可理想化为集中了许多分子电流细螺管的管口, 其形式上起到了磁荷的作用。由于同极磁荷相互排斥, 异极磁荷相互吸引的自退磁作用会使这些管口在两极端面及其周围趋于均匀对称分布, 从而仍能使式(1)中以各分子电流细螺管的管轴方向为积分变量的积分求和为零。故式(1)就与式(19)有相同形式。但是, 对理想点磁极式(11)普遍成立, 而式(18)的成立是有条件的。即对实际磁针的两极, 设分布有  $N$  个分子电流细螺管的管口, 则该条件是

$$\sum_{i=1}^N \left( \int_a^b \frac{3\mu P_{mi}}{4\pi} \frac{d\mathbf{r}_i}{r_i^2} \right) = 0 \quad (20)$$

这里, 式(1)与点电荷的库仑定律并不等价对应。

### 参 考 文 献

- 1 福里斯 C, 季莫刘娃 A B. 普通物理学, 第二卷第二分册. 北京: 高教出版社, 1953

## Proof of Coulemb's Magnetic Law and Analysis of Its Limitation

Qiao Shengbing

(Southwest Institute of Technology Sichuan Mianyang 621002)

**Abstract** According to the hypothesis of Amber's molecular electric current, the physical model of ideal magnetic pole is made by a thin solenoidal circuit, and the relation between the magnetic charge on the pole and the magnetic moment per unit length of the thin solenoidal circuit is got. It is verified that Coulomb's magnetic law establishes only to straight thin solenoidal circuits. Imitating the physics model of ideal magnetic pole, magnetized needles are modeled on many thin solenoidal circuits of molecular electric current. The establishing condition of Coulomb's magnetic law is got.

**Key words** magnetic charge; Coulemb's magnetic law; Molecular current; ideal magnetic pole