一种新的稳态误差级数表达式*

方　斌**

(安徽大学自动化系　合肥　230039)

【摘要】 提出了一种新的稳态误差级数表达式，以解决传统稳态误差级数表达式的缺陷。文中得出了三点结论，有利于分析稳态误差随时间变化的规律。

关　键　词　误差；级数；稳态

中图分类号　TP13

控制系统的稳态性能主要由稳态误差衡量，而稳态误差常使用终值定理求其终值；但有时不能使用终值定理，如输入函数的拉普拉氏变换在 s 平面的右侧不解析、稳态误差是时间的函数等。稳态误差级数能充分显示稳态误差随时间变化的规律，并解决终值定理不能使用时稳态误差的求取。

描述稳态误差级数时基本上使用下面两种方法，一是将误差传递函数 $\Phi_e(s)$ 在 s=0 处按泰勒级数展开，得

$$e_{sr}=c_0r(t)+c_1\dot{r}(t)+\frac{c_2}{2!}\ddot{r}(t)+\frac{c_3}{3!}\dddot{r}(t)+\cdots \tag{1}$$

式中　$c_i=\lim\limits_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\Phi_e(s)$。

另一种方法是将 $\Phi_e(s)$ 展开成 s 的升幂级数，即

$$\Phi_e(s)=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}s+\frac{1}{k_3}s^2+\frac{1}{k_4}s^3+\cdots$$

则有

$$e_{sr}=\frac{1}{k_1}r(t)+\frac{1}{k_2}\dot{r}(t)+\frac{1}{k_3}\ddot{r}(t)+\frac{1}{k_4}\dddot{r}(t)+\cdots \tag{2}$$

上述表达式在推导过程中没有直接利用稳态的概念，给出的式(1)或式(2)易被误解为系统误差的整个时域表达式，实质上是系统误差的稳态分量。另外，当系统的极点幅值小于1时，上述结论会产生错误结果。

设开环传递函数为 $G(s)=\frac{0.5}{s+0.1}$， 误差传递函数 $\Phi_e(s)=\frac{s+0.1}{s+0.6}$，则有 $c_0=\frac{1}{6},c_1=\frac{0.5}{0.6^2},\frac{c_2}{2!}=-\frac{0.5}{0.6^3},\frac{c_3}{3!}=\frac{0.5}{0.6^4},\cdots,\frac{c_i}{i!}=(-1)^{i-1}\frac{0.5!}{0.6^i}\cdots$，当输入函数 $r(t)$ 的各阶导数存在并且不趋于零时，式(1)的系数数值逐渐增大，并趋于无穷大。显然，该级数是不收敛的，稳态误差不能写成式(1)。为此本文提出一种表达式可反映稳态误差级数是系统误差的稳态分量，同时也可反映该级数是否收敛。

1　新的表达式

系统的误差可描述为

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)=\Phi_e(s)R(s)$$

式中　$\Phi_e(s)$ 为误差传递函数；$G(s)$为开环传递函数；$R(s)$为输入函数。

假设输入函数 $r(t)$ 是任意分段连续函数，则可用卷积公式计算给定误差为

1999年11月22日收稿

* 安徽省基础研究基金资助项目，基金号：98JL026

** 男　33岁　硕士　副教授

$$e(t)=\int_0^t \varphi_e(\tau) r(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

式中　$\varphi_e(t)$、$r(t)$ 分别为误差传递函数 $\Phi_e(s)$ 和输入函数 $R(s)$ 的拉氏反变换。因稳态误差所讨论的系统是稳定的，则 $1+G(s)=0$ 的根必在 s 平面的左半面，即闭环极点 $-p_i$ 的实部小于零。

如果 $G(s)=k\prod_{j=1}^{m}(s+a_j)\Big/\prod_{i=1}^{n}(s+z_i)$，那么

$$\Phi_e(s)=\prod_{j=1}^{n}(s+z_i)\Big/\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)$$

其中　$-z_i$、$-p_i$ 分别表示系统开环极点和闭环极点，且

$$\Phi_e(s)=1-\left[k\prod_{j=1}^{m}(s+a_j)\Big/\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)\right]=1-\sum_{k=1}^{n}A_k/(s+p_k)$$

其中

$$A_k=k\prod_{j=1}^{m}(s+a_j)\Big/\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)(s+p_k)\Big|_{s=-p_k}$$

将其进行拉氏反变换，有

$$\varphi_e(t)=\delta(t)-\sum_{i=1}^{n}A_i\exp\left(-p_i^t\right) \tag{4}$$

将式(4)代入式(3)得

$$e(t)=r(t)-\sum_{i=1}^{n}A_i\int_0^t \exp(-p_i\tau)r(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{5}$$

设 $B_i=\int_0^t \exp(-p_i\tau)r(t-\tau)\mathrm{d}t$，则

$$B_i=\frac{1}{p_i}\left[-r(0)\exp(-p_it)+r(t)-\int_0^t \exp(-p_i\tau)\dot{r}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

同理可得

$$\int_0^t \exp(-p_i\tau)r^{(l-1)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{p_i}\left[-r^{(l-1)}(0)\exp(-p_it)+r^{(l-1)}(t)-\int_0^t \exp(-p_i\tau)r^{(l)}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \tag{6}$$

因系统是稳定的，可将式(6)中暂态分量去掉，则稳态误差级数可表示为

$$e_{sr}=r(t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p_i}r(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p_i^2}\dot{r}(t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p_i^3}\ddot{r}(t)+\cdots+(-1)^l\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p_i^l}r^{(l-1)}(t)+R(t) \tag{7}$$

式中　余项 $R(t)$ 为 $(-1)^l\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{p_i^l}\int_0^t \exp(-p_i\tau)r^{(l)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 的稳态部分。

当闭环极点有共扼复数时仍可使用式(7)；当闭环极点存在 h 重根时，式(4)中有 h 项为 $A_{hk}\exp(-p_ht)t^k,k=0,1,2,\cdots,h-1$，$A_{hk}$ 的表达式略。

若略去暂态部分，则

$$\int_0^t \exp(-p_h\tau)\tau^k r^{(l)}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{k!}{(1+p_h)^k}\int_0^t \exp(-p_h\tau)r(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

若存在 h 重根时，仅需对式(4)中的 h 项为 $A_{hk}\exp(-p_ht)t^k,k=0,1,2,\cdots,h-1$ 所对应式(7)中的系数都乘以 $k!/(1+p_h)^k$ 即可。

由式(7)可以得出以下结论：1) 当输入函数 $r(t)$ 仅有 n 阶导数时，n 阶以上导数为零，则式(6)为有限项级数和；2) 当输入函数 $r(t)$ 存在各项导数且系统的闭环极点 $-p_i$ 幅值大于 1 时，则式(7)为无限项级数和，并且系数数值是逐渐衰减的，最终趋于零；3) 当输入函数 $r(t)$ 存在各项导数且有某些系统的闭环极点 $-p_i$ 幅值小于 1 时，则式(7)仅能写成有限项级数和，并加上余项 $R(t)$。

2 应用实例

例1 已知某单位反馈系统的开环传递函数是$G(s)=\dfrac{k}{s+1}$，$\Phi_e(s)=\dfrac{s+1}{s+1+k}=1-\dfrac{k}{s+1+k}$，因闭环极点为$-(1+k)$，其幅值大于1，则系统的稳态误差级数可表示为

$$e_{sr}=r(t)-\frac{k}{1+k}r(t)+\frac{k}{(1+k)^2}\dot r(t)-\frac{k}{(1+k)^3}\ddot r(t)+\cdots+(-1)^{l+1}\frac{k}{(1+k)^{l+1}}r^{(l)}(t)+\cdots=$$

$$\frac{1}{1+k}r(t)+\frac{k}{(1+k)^2}\dot r(t)-\frac{k}{(1+k)^3}\ddot r(t)+\cdots+(-1)^{l+1}\frac{k}{(1+k)^{l+1}}r^{(l)}(t)+\cdots$$

例2 已知某系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{0.5}{s+0.1}$，误差传递函数$\Phi_e(s)=\dfrac{s+0.1}{s+0.6}=1-\dfrac{0.5}{s+0.6}$，因闭环极点为$-0.6$，其幅值小于1，则系统的稳态误差级数不能表示成例1的形式，仅可表示为

$$e_{sr}=r(t)-\frac{0.5}{0.6}r(t)+\frac{0.5}{0.6^2}\dot r(t)-\frac{0.5}{0.6^3}\ddot r(t)+\cdots+R(t) \tag{8}$$

余项$R(t)$为

$$(-1)^l\frac{0.5}{0.6^l}\int_0^t\exp(-0.6\tau)r^{(l)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

若$r(t)=\sin wt$，$l=2$，余项$R(t)$为

$$\frac{0.5w^2}{0.6^2}\int_0^t\exp(-0.6\tau)\sin w(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由式(5)可得

$$e(t)=r(t)-0.5\int_0^t\exp(-0.6\tau)\sin w(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

考虑到上式的稳态部分就是e_{sr}，则将式(8)化为

$$e_{sr}=\frac{1}{6}r(t)+\frac{0.5}{0.6^2}\dot r(t)-\frac{w^2}{0.6^2}\left[r(t)-0.5\int_0^t\exp(-0.6\tau)\sin w(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]+\frac{w^2}{0.6^2}r(t)$$

若$e_{sr}=\dfrac{1}{6}r(t)+\dfrac{0.5}{0.6^2}\dot r(t)-\dfrac{w^2}{0.6^2}e_{sr}+\dfrac{w^2}{0.6^2}r(t)$，$(1+\dfrac{w^2}{0.6^2})e_{sr}=\dfrac{0.1\times0.6+w^2}{0.6^2}r(t)+\dfrac{0.5}{0.6^2}\dot r(t)$，则

$$e_{sr}=\frac{1}{0.6^2+w^2}[(0.1\times0.6+w^2)r(t)+0.5\dot r(t)]$$

用$E(s)=\Phi_e(s)R(s)$进行拉氏反变换，得出的时域解稳态部分与上式完全一致。从例2还可见，当输入函数的n阶导数为输入函数本身乘以某常数时，仍可用式(7)求出稳态误差。

本文给出的表达式不仅得出了三点有指导意义的结果，而且便于分析稳态误差随时间变化的规律，并能方便地确定稳态误差级数是否收敛。

参考文献

1 夏德钤. 自动控制理论. 北京: 机械工业出版社, 1989

2 李友善. 自动控制理论. 北京: 国防工业出版社, 1980

A New Expression of Steady-error Series

Fang Bin

(Dept of Automation, Anhui University Hefei 230039)

Abstract This paper gives a new expression of steady-error series, which overcome the fault of the traditional steady-error series .Three concludes are present, which can be used to analyze the rule of steady-error with time change.

Key words error; series; steady