利用Bernstein多项式设计FIR槽状滤波器

王玉林*

(武汉汽车工业大学电子与信息学院 武汉 430070)

【摘要】 针对在ω=0 和π处最为平坦的线性相位FIR槽状滤波器，利用Bernstein多项式推导出了计算其系数的显式。在给定槽口频率和带宽的滤波器的设计中，该方法不仅可行而且简单。经过实验测量，该槽状滤波器的频率响应与理想的频率响应非常接近。

关 键 词 槽状滤波器; 带宽; 算法

中图分类号 O156.3

本文提出了一种设计槽状FIR滤波器的新方法，该槽状FIR滤波器具有线性相位，是无条件稳定的。文献[1]中，对于给定槽口频率为ω_d和最大阻带为3 dB的滤波器，提出了一个通过限定其响应在ω=0和π 处为最平坦的设计方案。文中利用Crout法则，得到了一个计算有关权值的公式和递归算法；利用Bernstein多项式推出了计算权的显式，然后根据权值设计滤波器，并且将函数表示成cosω 的级数形式，用于设计不同截止频率的滤波器。

1 设 计

设槽状滤波器的频率响应为

$$H(\omega)=\sum_{i=0}^{n}a_i(\cos\omega)^i \tag{1}$$

在槽口频率点ω_d 处作180°的相移来逼近一个理想的槽状滤波器$H_d(\omega)$

$$H_d(\omega)=\begin{cases}+1 & |\omega|<\omega_d\\ -1 & \omega_d<|\omega|\leqslant\pi\end{cases} \tag{2}$$

利用Bernstein多项式来逼近式(2)的响应。设如图1所示的函数$f(x)$的函数值为

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=\begin{cases}+1 & 0\leqslant k\leqslant L\\ -1 & L+1\leqslant k\leqslant n\end{cases} \tag{3}$$

$f(x)$的n阶($n\geqslant 1$)Bernstein多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{4}$$

式(4)的另一表示形式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k f(0)\binom{n}{k}x^k \tag{5}$$

式中 $\Delta^k f(0)$是$f\left(\frac{k}{n}\right)$在$k$=0的第$k$ 个前向差分值，可以由其在$k=0,1,2,\cdots,n$处的函数值确定。

利用式(3)定义的$f\left(\frac{k}{n}\right)$执行代数运算，可以得到 $\Delta^k f(0)$的一系列值为

1999年11月20日收稿

* 男 34岁 硕士 讲师

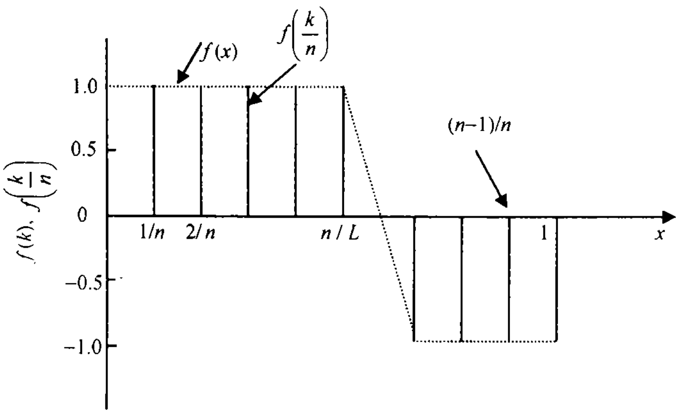

图1　利用函数$f(x)$和 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 来逼近槽状滤波器

$$\Delta^k f(0)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & 1\leqslant k\leqslant L\\ 2(-1)^{k-l}\binom{k-1}{k-L-1} & L+1\leqslant k\leqslant n\end{cases} \tag{6}$$

从式(6)可以看出，在$x=0$处的L个前向差分 $f(x)|_{x=k/n}=0$。因此在巴特沃斯意义上，L代表$f(x)$在$x=0$处的平直度。在式(5)中利用一个变换式

$$x=\frac{1-\cos\omega}{2} \tag{7}$$

可得

$$H(\omega)=Bn(x)\Big|_{x=\frac{(1-\cos\omega)}{2}}=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k f(0)\binom{n}{k}\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)^k \qquad 0\leqslant\omega\leqslant\pi \tag{8}$$

利用式(6)，可以将式(8)展开为

$$H(\omega)=1+\sum_{k=L+1}^{n}2(-1)^{k-L}\binom{n}{k}\binom{k-1}{k-L-1}\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)^k=$$

$$1+\sum_{k=L+1}^{n}2(-1)^{k-L}\binom{n}{k}\binom{k-1}{k-L-1}\sum_{i=0}^{n}2^{-k}(-1)^i\binom{k}{i}(\cos\omega)^i \tag{9}$$

通过简单的运算，式(9)可以化简为

$$H(\omega)=\sum_{i=0}^{n}a_i(\cos\omega)^i \tag{10a}$$

$$a_i=2^{-n}\left[2^n\binom{0}{i}+\sum_{k=L+1}^{n}(-1)^{k+i-L}2^{n+1-k}\binom{n}{k}\binom{k-1}{L}\binom{k}{i}\right] \qquad i=0,1,2,\cdots,n \tag{10b}$$

$$\binom{0}{i}=\begin{cases}1 & i=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{10c}$$

当$n=9$，$L=1\sim9$时，利用式(10b)计算得到的权值见表1。由式(10a)~(10c)可看出：对于一给定的n，只有n个可能不同的槽状滤波器，其槽口频率分别对应于$L=1\sim n$的 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 一般来说，所期望的槽口频率ω_d不一定刚好落在上述n个槽口频率的某一个上。文献[2]提出了一个获得ω_d的方法，即通过上述n个槽状滤波器中的两相邻槽状滤波器的线性组合获得所期望的ω_d。

表1 由式(10b)计算得到的权值(n=9和L=1~9)

L	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	−510	18	72	168	252	252	168	72	18	2
2	−492	144	432	672	504	0	−336	−288	−108	−16
3	−420	504	1 008	672	−504	−1 008	−336	288	252	56
4	−252	1 008	1 008	−672	−1 512	0	1 008	288	−252	−112
5	0	1 260	0	−1 680	0	1 512	0	−720	0	140
6	252	1 008	−1 008	−672	1 512	0	−1 008	288	252	−112
7	420	504	−1 008	672	504	−1 008	336	288	−252	56
8	492	144	−432	672	−504	0	336	−288	108	−16
9	510	18	−72	168	−252	252	−168	72	−18	2

2 设计步骤

问题：给定频率ω_d和3 dB截止带$\overline{BW}$，要求设计一个最平坦的FIR槽状滤波器。

1) 利用下式得到n的值

$$n \geqslant \text{integer}\{1/2[(\pi/\overline{BW})^2-(\pi/\overline{BW})+3]\} \tag{11}$$

2) 获得L=L_1的值，L_1对应于一个槽口频率ω_{L_1}（ω_{L_1}趋近ω_d且小于ω_d）。L_1的值为

$$L_1=(n+1)-[n(0.55+0.5\cos\omega_d)] \tag{12}$$

这里，L_1只取整数部分，对应$L_2=L_1+1$，对应的槽口频率为ω_{L_2}。很显然，ω_{L_2}趋近ω_d且大于ω_d。

3) 将1)和2)得到的数值n、L_1和L_2代入式(10a)，计算出系数$a_i^{(L_1)}$和$a_i^{(L_2)}$。

4) 设计的槽状滤波器的权值由下式给出

$$\alpha_i=\alpha\,\alpha_i^{(L_1)}+(1+\alpha)\alpha_i^{(L_2)} \tag{13}$$

式中 $\alpha=(\omega_{L_2}-\omega_d)/[(\omega_{L_2}-\omega_{L_1})\omega_{L_2}-\omega_{L_1}]$。

式(11)和式(12)是对文献[4,6]提出的最平坦低通滤波器设计公式作适当修改后得到。

3 性能评价

根据式(10b)计算权值所用的时间比文献[5]所用的时间少得多。我们利用式(10b)、式(11)~(13)设计了一些槽状滤波器，结果与要求相符。图2示出了ω_d= 1.2 rad和$\overline{BW}$ =0.38 rad的槽状滤波器的频率响应。利用本文的公式计算得到n、L_1、L_2、ω_{L_1}、ω_{L_2}和α的值分别为31、10、11、1.177 783 rad、1.245 955 rad和0.674 rad，由此设计得到的槽状滤波器的槽口频率和$\overline{BW}$恰好是1.2 rad和0.38 rad。图中的实线为滤波器理想的频率响应，虚线为利用本文的方法设计的滤波器实验测得的频率响应，由此可见两者非常接近。

4 结 论

本文利用Bernstein多项式，导出了计算槽状滤波器权数学式，该公式简单明了，便于实现。并给出了利用该公式设计槽状滤波器的实例，得到的槽状滤波器与理想的槽状滤波器非常接近。

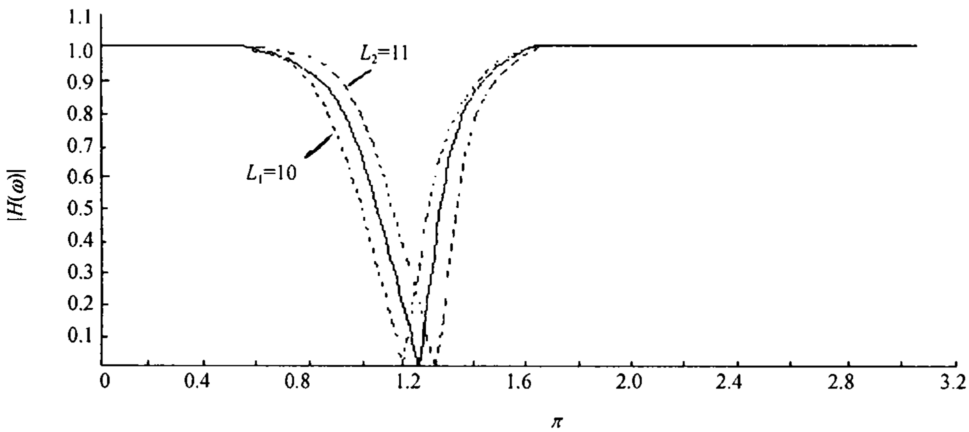

图2 理想与实际测得的频率响应特性曲线对照图

参 考 文 献

1 Bruck J, Blaum M. New technique for constructing Bernstein polynomials. IEEE Trans Computers, 1992, 41(10): 1 318~1 324

2 Roy S C Dutta, Jain S B, Kumar B. Design of digital FIR notch filters. Proc IEEE Vis Image Signal Process, 1994, (114): 334~338

3 Oppenheim A V, Mecklenbrauker W F G, Mersereau R M. Variable cutoff linear phase digital filters. IEEE Trans Circuits and Systems, 1976, CAS-23: 199~203

4 Kaiser J F, Reed W A. Data smoothing using low-pass digital filters. Rev Sci Instrum, PA: Carnegie Mellon University Press, 1977,48: 1 447~1 457

5 Davis P J. Interpolation and approximation. New York: Monttech High Press,1975

6 Herrmann O. On the approximation problem in nonrecursive digital filter design. IEEE Trans Circuit Theory, 1971, CT-18: 411~413

7 米尔曼 J. 微电子学：数字和模拟电路和系统. 清华大学电子教研室译. 北京：人民教育出版社，1980

Design of FIR Notch Filters Using Bernstein Polynomials

Wang Yulin

(College of Electronic and Information, Wuhan Automotive Polytechnic University Wuhan 430070)

Abstract In this paper, Bernstein polynomials are used to derive an explicit formula for the coefficients of linear phase FIR notch filters which are maximally flat at ω=0 and π。The approach is relatively simple and can be used to design the filters with specific notch frequency and bandwidth. The frequency response of the FIR notch filter presented in this paper is very close to its ideal frequency response.

Key words notch filter; bandwidth; algorithm