休假$M/G/1$排队系统离去过程的进一步分析*

唐应辉**　　唐小我

(电子科技大学应用数学系、管理学院　成都　610054)

【摘要】 对具有多重和单重服务员假期的$M/G/1$排队系统，进一步分析了其离去过程，得到在(0, t]时间内离去平均数的LS变换表达式；证明了在t=0时刻系统中无顾客且服务员也开始休假的条件下，如果服务时间和休假时间均服从负指数分布，则(0, t] 时间内离去平均数的LS变换表达式在到达率和服务率交换时是不变的；讨论了(0, t]时间内离去平均数的渐近展开，给出了便于计算的近似公式，具有重要的应用价值。

关 键 词 $M/G/1$排队；休假；离去；平均数；展开

中图分类号 O2132；O226

在串联排队系统中，上一站系统的离去(或输出)过程就是下一站系统的输入，直接影响到下一站系统的各项指标；而且在一段时间内离去顾客的平均数也反映了系统的工作效率。因此，对排队系统离去过程的研究一直是国内外应用数学工作者和运筹学专家研究的热点。文献[1]研究了$M/M/1$和$GI/G/1$排队系统的离去过程，证明了系统在初始时刻是空的条件下，时间(0, t]内输出顾客的平均数的LS变换表达式关于到达率与服务率的交换是不变的。但如果系统在初始时刻非空，该结论不成立。文献[2]研究了$M/M/1/N$和$GI/G/1/N$排队系统的离去过程，得出了比文献[1]更强的结果。文献[3]给出了$M/M/1$排队系统在t =0时刻是空的初始条件下，计算(0, t]内离去j个顾客的概率的精确表达式，并进行了实例计算。文献[4]研究了服务员休假的$M/G/1$排队系统的离去过程，并提出了分析离去过程的新技术。本文在文献[4]的基础上，进一步分析其离去过程，不仅得到比文献[4]更简练的结果，而且获得计算(0，t]时间内离去平均数的渐近展开式，以及类似于文献[1]的不变性结果。

本文考虑的模型如下：

模型1　考虑服务员具有多重休假的$M/G/1$排队系统，顾客相继到达的间隔时间序列$\{\tau_i, i\geqslant 1\}$独立、同参数$\lambda(>0)$的负指数分布$F(t)=1-\exp(-\lambda t)$，$t\geqslant 0$；顾客的服务时间序列$\{x_i, i\geqslant 1\}$独立、同一般分布$G(t)$，且平均服务时间$0<\dfrac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t)<\infty$。当系统变空时，服务员就去休假(或去干别的工作)。若服务员休假后回到系统中发现有顾客，则立即进行服务直到系统再次变空，又去进行休假；若服务员休假后回到系统中发现没有顾客，则立即进行另一次休假。假定休假时间长度序列$\{V_i, i\geqslant 1\}$独立、有一般分布$V(t)$，且到达、服务、休假相互独立。

模型2　考虑服务员具有单重休假的$M/G/1$排队系统，当系统变空时，服务员休假一次，若服务员休假后回到系统中发现有顾客，则立即进行服务直到系统再次变空，又去休假；若服务员休假后回到系统中发现没有顾客，则留在系统中闲着，直到下一个顾客的到来，即在系统每次变空时，服务员只进行一次休假，而其他假设条件与模型1相同。

1　模型1的有关结果

在以下讨论中，本文给出服务员忙期和系统闲期概念[4]：

1) 服务员忙期　指服务员开始为顾客服务的时刻起，直到系统再次变空为止这段时间，令b表示从一个顾客开始的“服务员忙期”长度，$b^{(i)}$表示从i个顾客开始的“服务员忙期”长度，且令

1999年7月5日收稿

* 国家杰出青年科学基金资助项目，基金号：79275002

** 男　36岁　硕士　教授

$$B(t)=P\{b\leqslant t\} \qquad B^{<i>}(t)=P\{b^{<i>}\leqslant t\} \qquad t\geqslant 0$$

$$b(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)\mathrm{d}B(t) \qquad b^{<i>}(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)\mathrm{d}B^{<i>}(t) \qquad i\geqslant 1$$

则对 $R(s)\geqslant 0$，有[4, 5]:

$b(s)$ 是方程 $z=g(s+\lambda(1-z))$ 在 $|z|<1$ 内最小绝对值的根，且

$$B(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{(\lambda x)^{k-1}}{k!}\exp(-\lambda x)\mathrm{d}G^{(k)}(x) \tag{1}$$

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\begin{cases}1 & \rho<1\\ \omega<1 & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{2}$$

$$E[b]=\int_0^{\infty}t\mathrm{d}B(t)=\begin{cases}\rho/\lambda(1-\rho) & \rho<1\\ \infty & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{3}$$

$$b^{<i>}(s)=[b(s)]^i \qquad i\geqslant 1 \tag{4}$$

且

$$B^{<i>}(t)=B^{(i)}(t) \qquad t\geqslant 0 \quad i\geqslant 1 \tag{5}$$

式中　$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$；$g(s)=\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)\mathrm{d}G(t)$ 表示分布 $G(t)$ 的LS变换；$R(s)$ 表示复变数s的实部；ω 是方程 $\omega=g(\lambda-\lambda\omega)$ 的根；$G^{(k)}(t)$、$B^{(k)}(t)$ 分别表示分布 $G(t)$、$B(t)$ 的 k 重卷积，$k\geqslant 1$，且 $G^{(0)}(t)=B^{(0)}(t)=1$、$t\geqslant 0$。

2) 系统闲期　指从系统刚变空的时刻起，直到下一个顾客到达空闲的系统为止这段时间。由于到达是Poisson流，所以系统闲期长度 $\tilde{\tau}$ 有以下分布

$$P\{\tilde{\tau}\leqslant t\}=F(t)=1-\exp(-\lambda t) \qquad t\geqslant 0 \tag{6}$$

对 $t\geqslant 0$，令 $A_i(t)=P\{\text{时刻}t\text{处于服务员忙期}/_{N(0)=i}\}$，$\hat{a}_i(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)A_i(t)\mathrm{d}t$、$i\geqslant 0$。

定理1　对 $R(s)\geqslant 0$，有

$$\hat{a}_0(s)=\frac{f(s)}{s}\left\{1-\frac{b(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \tag{7}$$

$$\hat{a}_i(s)=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{b^i(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \qquad i\geqslant 1 \tag{8}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\lim_{s\to 0^+}s\hat{a}_i(s)=\begin{cases}\rho & \rho<1\\ 1 & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{9}$$

式中　$f(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)\mathrm{d}F(t)$，$v(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)\mathrm{d}V(t)$ 分别表示 $F(t)$、$V(t)$ 的LS变换；$N(0)$表示时刻 $t=0$ 时系统中的顾客数。

证明　令 $S_k=\sum_{i=1}^{k}V_i$，$L_k=\sum_{i=1}^{k}\tau_i$，$k\geqslant 1$；$S_0=L_0=0$，则

$$A_0(t)=P\{\tilde{\tau}_1\leqslant t<\tilde{\tau}_1+b_1\}+P\{\tilde{\tau}_1+b_1\leqslant t;\text{时刻}t\text{处于服务员忙期}\}=$$

$$\int_0^t[1-B(t-x)]\mathrm{d}F(x)+\sum_{k=1}^{\infty}P\{S_{k-1}\leqslant\tilde{\tau}_2<S_k;\tilde{\tau}_1+b_1+S_k\leqslant t;\text{时刻}t\text{处于服务员忙期}\} \tag{10}$$

式中　b_1 表示第一个服务员忙期长度，其分布为 $B(t)$；$\tilde{\tau}_i$ 表示第 i 个系统闲期长度，其分布为 $F(t)$，$i\geqslant 1$。而式(10)中第二项为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P\{S_{k-1}\leqslant\tilde{\tau}_2\leqslant S_k;\tilde{\tau}_2+L_{j-1}\leqslant S_k\leqslant\tilde{\tau}_2+L_j;\tilde{\tau}_1+b_1+S_k\leqslant t;\text{时刻}t\text{服务员处于服务员忙期}\}=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}A_j(t-x-y-u)\frac{(\lambda u)^j}{j!}\exp[-\lambda(y+u)]\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}F*B(x) \tag{11}$$

式中 $V^{(k)}(t)$为$V(t)$的k重卷积，$k\geqslant 1$，且$V^{(0)}(t)=1$，$t\geqslant 0$；$F*B(x)$为分布$F(x)$与$B(x)$的卷积。

对式(10)和式(11)取拉普拉斯(L)变换，并注意到L变换与LS变换之间的关系，可得

$$\hat{a}_0(s)=\frac{f(s)[1-b(s)]}{s}+\frac{f(s)b(s)}{1-v(s+\lambda)}\sum_{j=1}^{\infty}\hat{a}_j(s)\int_0^{\infty}\exp[-(s+\lambda)t]\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{d}V(t) \tag{12}$$

对$i\geqslant 1$，类似可得

$$A_i(t)=1-B^{(i)}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}A_j(t-x-y-u)\frac{(\lambda u)^j}{j!}\exp[-\lambda(y+u)]\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x)$$

其L变换为

$$\hat{a}_i(s)=\frac{1-b^i(s)}{s}+\frac{b^i(s)}{1-v(s+\lambda)}\sum_{j=1}^{\infty}\hat{a}_j(s)\int_0^{\infty}\exp[-(s+\lambda)t]\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{d}V(t) \qquad i\geqslant 1 \tag{13}$$

由式(12)、式(13)，可得$\hat{a}_i(s)$与$\hat{a}_0(s)$的关系式

$$\hat{a}_i(s)=\frac{1-b^{i-1}(s)}{s}+\frac{b^{i-1}(s)}{f(s)}\hat{a}_0(s) \qquad i\geqslant 1 \tag{14}$$

将式(14)代入式(12)，经整理即得式(7)，然后再结合式(14)得到式(8)。又因为

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\mathrm{d}A_i(x)+A_i(0)=\lim_{t\to\infty}\lim_{s\to 0^+}\int_0^t\exp(-sx)\mathrm{d}A_i(x)+A_i(0)=$$

$$\lim_{s\to 0^+}\int_0^{\infty}\exp(-sx)\mathrm{d}A_i(x)+A_i(0)=\lim_{s\to 0^+}s\int_0^{\infty}\exp(-sx)A_i(x)\mathrm{d}x=\lim_{s\to 0^+}s\hat{a}_i(s) \tag{15}$$

于是，使用罗必达法则，结合式(2)与式(3)即得式(9)。

令$M_i(t)$表示该系统从初始状态$N(0)=i$出发，在(0，t]时间内离去顾客的平均数，且

$$m_i(s)=\int_0^{\infty}\exp(-st)\mathrm{d}M_i(t) \qquad i\geqslant 0$$

定理2 对$R(s)\geqslant 0$，则

$$m_0(s)=\frac{g(s)f(s)}{1-g(s)}\left\{1-\frac{b(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \tag{16}$$

$$m_i(s)=\frac{g(s)}{1-g(s)}\left\{1-\frac{b^i(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \qquad i\geqslant 1 \tag{17}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t}=\lim_{s\to 0^+}sm_i(s)=\begin{cases}\lambda & \rho<1\\ \mu & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{18}$$

证明 使用文献[4]提出的分析方法，类似文献[4]中定理1的证明即可完成。

定理3 在初始时刻$t=0$系统中没有顾客时，若服务员也去进行休假，则

$$\hat{a}_i(s)=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{b^i(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \qquad i\geqslant 0 \tag{19}$$

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\begin{cases}\rho & \rho<1\\ 1 & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{20}$$

$$m_i(s)=\frac{g(s)}{1-g(s)}\left\{1-\frac{b^i(s)[1-v(s)]}{1-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \qquad i\geqslant 0 \tag{21}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t}=\lim_{s\to 0^+}sm_i(s)=\begin{cases}\lambda & \rho<1\\ \mu & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{22}$$

定理4　在初始时刻 $t=0$ 系统中没有顾客时，若服务员也去进行休假，而且服务时间与休假时间均为负指数分布，则到达率与服务率交换时，$m_0(s)$ 是不变的。

证明　因为当 $G(t)=1-\exp(-\mu t)$，$V(t)=1-\exp(-\varepsilon t)$ 均为负指数分布时，有

$$m_0(s)=\widetilde{m}_0(s)v(s) \tag{23}$$

式中　$\widetilde{m}_0(s)=\int_0^\infty \exp(-st)\mathrm{d}\widetilde{M}_0(t)$，而 $\widetilde{M}_0(t)$ 表示在 $t=0$ 时系统是空的条件下，标准的 $M/M/1$ 排队系统在 $(0,t]$ 内离去顾客的平均数。

根据文献[1]中定理1，当到达率与服务率交换时 $\widetilde{m}_0(s)$ 是不变的，而 $v(s)$ 与到达率和服务率无关，于是 $m_0(s)$ 也是不变的。

从式(18)、式(22)可得，当 t 充分大时计算 $M_i(t)$ 的近似公式为

$$M_i(t)\approx\begin{cases}\lambda t & \rho<1\\ \mu t & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{24}$$

定理5　若服务时间的二阶原点矩 $\boldsymbol{E}[x^2]<\infty$，则对一切 $i\geqslant 0$，有

$$\lim_{t\to\infty}[M_i(t)-(\mu t)*A_i(t)]=\begin{cases}\rho\left\{\dfrac{\mu^2\boldsymbol{E}[x^2]}{2}-1\right\} & \rho<1\\ \dfrac{\mu^2\boldsymbol{E}[x^2]}{2}-1 & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{25}$$

证明　由定理1~定理3可以得到：$m_i(s)=m(s)[s\hat{a}_i(s)]$。$m(s)=\dfrac{g(s)}{1-g(s)}$ 表示更新函数 $M(t)=\sum_{k=1}^{\infty}G^{(k)}(t)$ 的LS变换，于是由反演变换可得

$$M_i(t)=M(t)*A_i(t)\qquad i\geqslant 0 \tag{26}$$

故

$$M_i(t)-(\mu t)*A_i(t)=[M(t)-\mu t]*A_i(t)\qquad i\geqslant 0 \tag{27}$$

于是

$$\lim_{t\to\infty}[M_i(t)-(\mu t)*A_i(t)]=\lim_{t\to\infty}[M(t)-\mu t]\lim_{t\to\infty}A_i(t) \tag{28}$$

又

$$\lim_{t\to\infty}[M(t)-\mu t]=\frac{\mu^2\boldsymbol{E}[x^2]}{2}-1 \tag{29}$$

再结合定理1即可完成证明。因此从式(25)得到比式(24)更精确的近似公式，即当 t 充分大时，有

$$M_i(t)\approx\begin{cases}\lambda t+\rho\left\{\dfrac{\mu^2\boldsymbol{E}[x^2]}{2}-1\right\} & \rho<1\\ \mu t+\dfrac{\mu^2\boldsymbol{E}[x^2]}{2}-1 & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{30}$$

2　模型2的有关结果

定理6　对 $R(s)\geqslant 0$，有

$$\hat{a}_0(s)=\frac{f(s)}{s}\left\{1-\frac{b(s)\{1-v(s)+v(s+\lambda)[1-f(s)]\}}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \tag{31}$$

$$\hat{a}_i(s)=\frac{1}{s}\left\{1-\frac{b^i(s)\{1-v(s)+v(s+\lambda)[1-f(s)]\}}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\}\qquad i\geqslant 1 \tag{32}$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}A_i(t)=\begin{cases}\rho & \rho<1\\ 1 & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{33}$$

定理7　对 $R(s)\geqslant 0$，有

$$m_0(s)=\frac{g(s)f(s)}{1-g(s)}\left\{1-\frac{b(s)\{1-v(s)+v(s+\lambda)[1-f(s)]\}}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \tag{34}$$

$$m_i(s)=\frac{g(s)}{1-g(s)}\left\{1-\frac{b^i(s)\{1-v(s)+v(s+\lambda)[1-f(s)]\}}{1+v(s+\lambda)[1-f(s)b(s)]-v(s+\lambda-\lambda b(s))}\right\} \qquad i\geqslant 1 \tag{35}$$

而且
$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_i(t)}{t}=\begin{cases}\lambda t & \rho<1\\ \mu t & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{36}$$

定理8 若服务时间的二阶原点矩$E[x^2]<\infty$，则对一切$i\geqslant 0$，有

$$\lim_{t\to\infty}[M_i(t)-(\mu t)*A_i(t)]=\begin{cases}\rho\left\{\dfrac{\mu^2 E[x^2]}{2}-1\right\} & \rho<1\\ \dfrac{\mu^2 E[x^2]}{2}-1 & \rho\geqslant 1\end{cases} \tag{37}$$

对于模型1与模型2，虽然有关瞬态指标不同，但其极限结果都一样，从而当t充分大时，仍有式(24)与式(30)的近似公式。

参考文献

1 Ali H. Expected number of departures in $M/M/1$ and $GI/G/1$ queue. Adv Appl Prob, 1990, 22: 770~772

2 Chao X. On the departure processes of $M/M/1/N$ and $GI/G/1/N$ queues. Adv Appl Prob, 1992, 24: 751~753

3 Hubbard J R, Pegden C D, Rosenshine M. The departure process for the $M/M/1$ queue. J Appl Prob, 1986, 23: 249~255

4 Tang Y H. The departure process of the $M/G/1$ queueing model with server vacation and exhaustive service discipline. J Appl Prob, 1994, 31: 1 070~1 082

5 唐应辉. 排队模型中计算队长分布的递推式. 电子科技大学学报, 1997, 26(3): 298~302

6 Ross S M. Stochastic process. New York: Wiley, 1983

Further Analysis of Expected Number of Departures in *M/G/1* Queues with Server Vacations

Tang Yinghui Tang Xiaowo

(Dept of Applied Mathematics;Management College, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, the departure processes of $M/G/1$ queueing systems with single server vacation and multiple server vacations are analyzed. The expressions of the LS transform of the expected number of departures during the time interval (0, t] are obtained. It is shown that the LS transform of the expected number of departures during (0, t] is invariant under the interchange of arrival and service rates in the initially empty $M/M/1$ queue in which the server begins vacations at $t=0$ and the length of each vacation has an exponential distribution. Simultaneously the asymptotic expansions of the expected number of departures during (0, t] are also discussed. It is given that the asymptotic formula are convenient in application.

Key words $M/G/1$ queue; vacation; departure; expected number; expansion