第29卷 第3期 电子科技大学学报 Vol.29 No.3
2000年6月 Journal of UEST of China Jun. 2000

一般约束极大极小问题的广义梯度投影算法*

陈华富** 田益祥
(电子科技大学应用数学系 成都 610054) (武汉科技大学管理工程系 武汉 430070)

【摘要】 讨论了一类带等式、不等式约束的极大极小值问题，将其转化为带等式、不等式约束的非线性规划问题，利用辅助规划进行处理，给出了一个广义的梯度投影算法，解决了一般约束极大极小值问题。算法可在有限步达到最优点或产生一系列点列，其极限点则是最优点，并证明了该算法的全局收敛性。

关 键 词 极大极小问题； 广义梯度算法； 算法的收敛性； 辅助规划

中图分类号 O212.2

对于极大极小值问题

$$\min f(x)=\max\{f_i(x)\}$$
$$\text{s.t}\quad g_i(x)\leqslant 0\qquad 1\leqslant i\leqslant q$$

式中 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in R^n, f_i:R^n\to R', g_i:R^n\to R', R^n(n\geqslant 1)$为$n$维欧氏空间。文献[1,2]给出了不同的解决方法，但只能解决不等式约束，而解决等式约束十分困难；文献[3~5]提出了解非线性规划的广义梯度投影法解决等式约束问题。本文把极大极小值问题转化为非线性带等式、不等式约束的优化问题，得到了一种有效的解极大极小值问题的算法。

1 问题的提出

考虑一般性的极大极小值问题

$$\min f(x)=\max\{f_i(x')\}$$
$$\text{s.t}\begin{cases}g_i(x')\leqslant 0 & 1\leqslant i\leqslant q\\ h_j(x')=0 & j\in L_2\end{cases}\tag{1}$$

式中 $x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$， $L_2=\{m+1,\cdots,n\}$， $f_i,g_i,h_i:R^n\to R'$。式(1)则转化为下列规划

$$\min\delta$$
$$\text{s.t}\begin{cases}f_i(x')\leqslant\delta & 1\leqslant i\leqslant p\\ g_i(x')\leqslant 0 & 1\leqslant i\leqslant p\\ h_j(x')=0 & j\in L_2\end{cases}\tag{2}$$

令 $x=(\delta,x')\in R^{n+1}$， $h_i(x)=-\delta+f_i(x')$， $1\leqslant i\leqslant p$； $h_j(x)=g_j(x)$， $1\leqslant j\leqslant q$， $f(x)=\delta$， $p+q=m$，式(2)则转化为规划(NP)

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t}\begin{cases}h_i(x)\leqslant 0 & i\in L_1\\ h_j(x)=0 & j\in L_2\end{cases}\tag{3}$$

式中 $L_1=\{1,2,\cdots,m\}$， $L_2=\{m+1,\cdots,n\}$。记$L=L_1\cup L_2$， $R'=\{x\in E^n$， $h_i(x)\leqslant 0$， $i\in L_1\}$， $R=\{x\in E^n$，$h_i(x)\leqslant 0, i\in L_1$； $h_j(x)=0$， $j\in L_2\}$， $g(x)=-\nabla f(x)$， $A(x)=\{\nabla h_j(x)$， $j\in L\}$， $J_0(x)=\{j\mid h_j(x)=0, j\in L_1\}$， $H(x)=\text{diag}(h_i(x)$， $i\in L)$， $H_i(x)=h_i(x)$， $i\in L_1$； $H_i(x)=0$， $i\in L_2$，则$H(x)\leqslant 0$。

记$B(x)=(A(x)^TA(x)-H(x))^{-1}A(x)^T$, $u(x)=(u_j(x),j\in L)^T=B(x)^Tg(x)$, $p(x)=E-A(x)(A(x)^T)\times$

1999年9月9日收稿
* 四川省青年科技基金资助项目，基金号：1997 7003
** 男 32岁 讲师 在职博士生

$A(x)-H(x))^{-1}A(x)^T$。

定义

$$(\text{Ap})\begin{cases}\min G_C(x) \\ \text{s.t } h_i(x)\leqslant 0 \qquad i\in L_1\end{cases} \tag{4}$$

式中 $G_c(x)=f(x)+C\sum\limits_{i\in L2}|h_i(x)|$，$C>0$，$C$为参数。

这里假设：1) $f(x),h_j(x)\in C', j\in L$；2) $\{\nabla h_j(x), j\in J_0(x)\cup L_2\}$线性无关。

2 性质和算法

引理1 $\forall x\in R'$，矩阵$(A(x)^T A(x)-H(x))$正定。

记$DG_C(x;d)$为x处的方向导数

$$\overline{C}(x)=\max\{|u_j(x)|\, j\in L_2\}+\overline{C_0}$$

式中 $\overline{C_0}$是一个充分小的正常数，简记$\overline{C}(x)=\overline{C}$，$C(x_k)=C^k$。其算法是：取$x_0\in R, k=0,\varepsilon>0$：

1) 计算$B(x_k),u(x_k),p(x_k)$。

2) 计算$s^k=p(x_k)g(x_k)+B(x_k)^T V(x_k)$，其中

$$V_i(x)=\begin{cases}u_i(x_k) & u_i(x_k)\leqslant 0 & i=L_1 \\ -h_i(x_k) & u_i(x)>0 & i=L_1 \\ -h_j(x_k) & & j=L_2\end{cases}$$

3) 若$\overline{C^k}>C^{k-1}$，则令$C^k=\max\{\overline{C^k},\overline{C^{k-1}}+\varepsilon\}$，否则令$C^k=C^{k-1}$。

4) 计算$DG_{C^K}(x_k;s^k)$，若$DG_{C^K}(x_k;s^k)=0$，则x_k是K-T点，停，否则转5)。

5) 计算 $d^k=s^k+\rho^k B(x_k)V(x_k)$，其中

$$\rho^k=\frac{|DG_{C^k}(x_k;s^k)|}{2|u(x_k)^T W|+1}$$

$$w_j=\begin{cases}-1 & j\in L_1 \\ 0 & j\in L_2\end{cases}$$

6) 求沿方向d的一维搜索步长λ^k，λ^k是$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2}\cdots\}$中满足$x_{k+1}=x_k+\lambda^k d^k\in R$和$-\frac{1}{2}\lambda^k DG_{C^k}(x_k;d^k)\leqslant G_{C^k}(x_k)-G_{C^k}(x_k+\lambda^k d^k)$的最大值。

7) 置$k:=k+1$，$x_k:=x_{k+1}$，转1)。

引理2 对任意$x\in E^n$,有

$$DG_C(x;d)=\nabla f(x)^T d+C\sum_{\substack{j\in L_2 \\ h_j(x)>0}}|\nabla h_j(x)^T d|+C\sum_{\substack{j\in L_2 \\ h_j(x)=0}}|\nabla h_j(x)^T d|-C\sum_{\substack{j\in L_2 \\ h_j(x)<0}}|\nabla h_j(x)^T d|$$

定理1 对任意$x_k\in R$，$DG_{C^k}(x_k;d^k)=0$，则x_k是原问题的K-T点。

证明 由引理1、2和算法步骤可得

$$DG_{C^K}(x_k,s^k)=-\|p(x_k)g(x_k)\|^2-\sum_{\substack{j\in L_1 \\ u_j(x)\leqslant 0}}[u_j(x_k)]^2-\sum_{\substack{j\in L_1 \\ u_j(x)>0}}[u_j(x_k)(-h_j(x_k)]+$$
$$\sum_{\substack{j\in L_2 \\ h_j(x)>0}}[u_j(x_k)-C^k](-h_j(x_k)]+\sum_{\substack{j\in L_2 \\ h_j(x)<0}}[u_j(x_k)+C^k]h_j(x_k) \tag{5}$$

于是可得$DG_{C^K}(x_k,s^k)\leqslant 0$。若$DG_{C^K}(x_k,s^k)=0$，则有$p(x_k)g(x_k)=0$，可以推出$x_k$为(NP)$K$-$T$点。

引理3　若 $x_k \in R'$ 非 K-T 点，则有：

1) $\nabla h_j(x_k)^T s^k \leqslant 0,\quad j \in J_0(x_k)$;

2) $-DG_{C^k}(x_k, s^k) > 0, x_k \in R'$。

引理4　若 $x_k \in R'$ 非 K-T 点，则有：

1) $\nabla h_j(x_k)^T d^k \leqslant 0, j \in J_0(x_k)$;

2) $-DG_{C^k}(x_k, d^k) > 0, x_k \in R'$。

引理5　若算法产生的点列 $\{x_k\}$ 包含于一聚点，当 k_0 充分大时均有 $C^k = C^{k_0} \triangleq C^0$。

若算法产生的无穷点列 $\{x_k\}$，x^* 为其极限点，且子列 $\{x_k\}_K \to x^*$，则 $x^* \in R$。定义 $u^* = u_j(x^*), j \in L$，即有 $\{u(x_k)\}_K \to u^*$，又定义 s^*, p^*, d^*。

引理6　若 x^* 为(NP)的非 K-T 点，则

$$-DG_{C^k}(x^*; d^*) > 0 \tag{6}$$

引理7　若 x^* 为(NP)的非 K-T 点，则存在 $\mu > 0$，$\forall \lambda \in (0, \mu)$ 充分大的 $k \in K$，有 $x^* + \lambda d^* \in R'$。

定理2　如果算法产生的点列 $\{x_k\}$ 包含于紧集中，则算法在有限步停止于原问题的 K-T 点，或产生一无穷点列 $\{x_k\}$，其极限点列为(NP)的 K-T 点。

证明　1) 算法在有限步停止，由定理1得证；

2) 设 x^* 为算法产生的点列 $\{x_k\}$ 的极限值，考察下列两种情况：

(1) $\lambda^k > 0, k \in K$，由算法的搜索规则，有

$$G_{C^k}(x_{k+1}) \leqslant G_{C^k}(x_k) + \frac{1}{2}\lambda^k G_{C^k}(x_k; d^k)$$

当 $k > k_0$ 时，$\{G_{C^*}(x_k)\}$ 是单调下降序列，$G_{C^*}(x)$ 存在；当 $k \in K, k \to \infty$，有 $DG_{C^*}(x^*; d^*) \geqslant 0$，与式(6)矛盾。

(2) $k \to \infty$、$\lambda^k \to 0$，由引理7可知

$$\forall (x_k, d^k) \in \{(x,d) \mid \|x - x^*\| \leqslant \eta, \|x - x^*\| \leqslant \eta\}$$

有 $DG_{C^*}(x_k; d^k) > 0$ 成立，$\eta > 0$。由 $DG_C(x; d)$ 的定义知，存在收敛点列设极限点为 $\bar{x} > 0$，使

$$G_{C^*}(x_k + \lambda d^k) - G_C(x_k) = \lambda DG_C(x_k; \lambda d^k) + 0(\lambda) \leqslant \frac{\lambda G_C(x_k + \lambda d^k)}{2}$$

存在 $\bar{\lambda} > 0$，对任意 $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ 成立，特别是取 $x = \bar{x}$ 及 k 充分大时成立，产生矛盾，说明(1)、(2)不可能出现，于是得到的点 x^* 为非线性规划式(3)的解，也就是极大极小值问题式(1)的解。

参 考 文 献

1 Charalamobous, Conn A R. An efficient method to sovle the mini-max problem directively. SIAM Number Anal,1978,51(1):162~187

2 王万良. 极大极小问题的广义投影梯度解法. 系统工程理论与实践, 1997, 1 715:42~46

3 赖炎连, 高自友, 贺国平. 非线性最优化的广义梯度投影法. 中国科学(A)辑, 1992, 9: 916~924

4 陈华富, 钮　海, 何广宗. 一般约束优化问题的广义梯度投影法. 电子科技大学学报, 1997, 26(增刊): 83~88

5 何光宗, 陈华富. 初始点任意的广义梯度投影算法. 电子科技大学学报, 1997, 26(5): 552~556

6 陈华富, 田益祥. 一般约束问题的广义摄动梯度技影算法. 武汉冶金科技大学学报, 1999, 4: 420~422

A General Projection Gradient Method for General Max-min Problems

Chen Huafu

(Dept. of Applied Math., UEST of China Chengdu 610054)

Tian Yixiang

(Dept. of Managent,Wuhan Yue Jin Science and Technology Univ. Wuhan 430070)

Abstract In this paper, a sort of max-min problems with inequality and equality are discussed, which are made into nolinear optimization problems with inequality and equality. Auxiliary problem and penality function are used to deal with max-min problems. A general projection gradient method is given, and the max-min problems with general constraints problems are solved. The algorithms get optimization point in infinite steps or get a series of points, whose limit points are optimization points. The algorithm convergence is also proved .

Key words max-min problem; general project gradient; algorithm convergence; auxiliary program

·科研成果介绍·

多媒体安全监控系统

主研人员：陈雷霆 袁宏春 吉家成 赵 平 曹晓阳

多媒体安全监控系统采用系统工程设计方法，将系统软、硬件平台建立在当前计算机新技术的基础上，开发出图、声、文并茂的安全监控系统。该系统成功地设计了PC机与矩阵切换器的通信协议，提高了通信效率和可靠性。全系统能有效地进行实时控制，具有完善的信息管理功能。

微波副载波调频CATV实用化光传输系统

主研人员：唐明光 邱 昆 王志玉 周 东 周 波 梅克俊等

该项目完成了两个光传输系统：C波段副载波调频CATV实用化光传输系统和射频副载波调频CATV实用化光传输系统(包括一个2 Mb/s数字通信)，传输频道为4(C波段)/16+1+1(射频波段)，DG<5%，DP<5°，具有全汉化双向监控系统。

该系统主要技术性能如载噪比28 dB(C波段)/26.5 dB(射频波段)；传输距离大于30 km(C波段)/50 km(射频波段)。

·科 卞·