

# 区域分解法结合 FFT 分析 TEM 传输线\*

龙毅\*\* 徐军 薛良金

(电子科技大学应用物理所 成都 610054)

**【摘要】** 将区域分解法(DDM)应用于电磁场问题分析, 计算了准 TEM 传输线的特性阻抗, 并通过数值试验研究了区域分解法的收敛性及计算效率。利用区域分解法的优越性, 在划分的几个规则子区域上引入 FFT 快速算法, 分析了矩形同轴线的特性阻抗。数值结果表明, 区域分解法降低了计算复杂性、减小了计算规模, 且提高了计算效率。

**关键词** 区域分解法; 快速傅里叶变换; TEM 传输线; 准 TEM 传输线

**中图分类号** TN817; O441

区域分解法是当前并行计算中最活跃的研究领域之一<sup>[1, 2]</sup>, 其算法是把计算区域分解为若干子域, 子域的形状尽可能规则, 将原问题的求解转化为在子域上求解, 并且可方便地实现并行计算。C.T.Spring 在并行计算机上用区域分解法分析了波导系统的特性<sup>[3]</sup>, Z.Zhu 在子域中分别采用 FEM 和模式匹配法, 将区域分解算法用于 VLSI 电容矩阵的参数提取<sup>[4]</sup>。由于模式匹配法公式推导复杂, 对任意结构适应性差, 并且计算量较大, 本文利用区域分解法独特的优势, 将子域的形状划分得尽可能规则, 并在规则子域上引入 FFT 快速算法, 提高了计算效率, 拓宽了对复杂结构的适应性。

## 1 理论与算法

如图1所示的屏蔽微带线, 当频率较低时, 可认为传播的主模近似于 TEM 模, 区域  $\Omega:OACB$  内的横向电场满足二维 Laplace 方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{1}$$

四周边界上  $\Gamma: \overline{OA} + \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BO}$  满足边界条件

$$\varphi|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

将区域划分为重叠的两个子区域, 即  $\Omega_1:OEGB$  和  $\Omega_2:DACF$ , 它们的边界分别为  $\Gamma_1: \overline{OE} + \overline{EG} + \overline{GB} + \overline{BO}$  和  $\Gamma_2: \overline{DA} + \overline{AC} + \overline{CF} + \overline{FD}$ , 因而可构造如下重叠区域分解算法为<sup>[2]</sup>

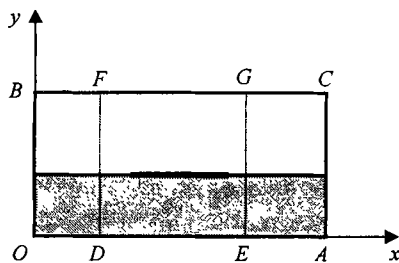


图1 屏蔽微带线的重叠区域分解

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1^{i+1} = 0 & (x, y) \in \Omega_1 \\ \varphi_1^{i+1} = 0 & (x, y) \in \Gamma_1 - \overline{EG} \\ \varphi_1^{i+1} = \varphi_2^i & (x, y) \in \overline{EG} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_2^{i+1} = 0 & (x, y) \in \Omega_2 \\ \varphi_2^{i+1} = 0 & (x, y) \in \Gamma_2 - \overline{FD} \\ \varphi_2^{i+1} = \varphi_1^{i+1} & (x, y) \in \overline{FD} \end{cases} \tag{4}$$

式中  $i = 0, 1, 2, \dots$ 。

对于区域  $\Omega$  内任意初始值  $\varphi^0$ , 首先在子区域  $\Omega_1$  内求解式(3), 将其区域内的解  $\varphi_1^i$  在  $\overline{FD}$  上的值作为区域  $\Omega_2$  的边界值代入式(4), 求解  $\Omega_2$  上的边值问题, 得到  $\varphi_2^i$ , 而  $\varphi_2^i$  在  $\overline{EG}$  上的值又作为区

2000年2月27日收稿

\* 国家高性能计算基金资助项目, 基金号: 99404

\*\* 男 35岁 博士 副教授

域 $\Omega_1$ 新的修正后的边界值代入式(3), 重新计算 $\Omega_1$ 上的边值问题, 如此迭代下去, 即可得到子区域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 内收敛的 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ , 且在重叠区域 $DEGF$ 内 $\varphi_1 = \varphi_2$ , 其解为整个区域上边值问题的解。从上面的算法发现, 复杂的区域可以划分为若干重叠的简单子区域, 由此在子区域上分别求解, 子区域之间的信息通过重叠区域的边界进行交换, 因此降低了计算的复杂性和计算规模, 由于各子区域的求解相互独立, 容易实现并行计算。

区域分解法的收敛性取决于重叠区域的大小, 从直观上可以看出重叠面积越大, 收敛越快, 文献[2]从理论上证明了迭代误差随重叠面积的增大按指数减小, 但加大了子区域的计算规模, 使每一次迭代的计算效率降低, 因此在子区域内寻求快速高效的算法可极大地提高整个区域分解法的计算效率, 由于区域分解法划分子区域极大的灵活性, 故能将问题划分为若干个相互重叠的尽可能规则的子区域, 如矩形区域, 可在矩形区域上采用FFT算法数值求解偏微分方程<sup>[2-5]</sup>。由于引入FFT技术, 在子区域上求解差分方程的工作量仅为 $O(P \lg P)$ ,  $P$ 为子区域上未知量个数。

## 2 数值结果

将图2所示的屏蔽微带线结构划分为左右相等的两个重叠区域, 重叠区域宽度为 $w$ , 微带线结构为 $a/h=10$ ,  $b/h=5$ 。用区域分解法分别计算了 $\varepsilon_r = 2.22$ 和 $\varepsilon_r = 9.60$ 时, 微带线宽度 $w$ 与特性阻抗 $Z_c$ 的关系, 计算中重叠区域的宽度为 $w$ , 子域内均采用有限差分法(FDFD)计算。计算结果表明, 区域分解法与整个区域上的有限差分法求解具有相同的精度, 且对不同的重叠区域, 区域分解法都能得到与有限差分法相同精度的数值结果。对图3所示的悬置微带线 $a/h=10$ ,  $b/h=5$ ,  $h_1/h=h_2/h=2$ , 区域分解成上下两个以介质衬底为重叠区域的子区域, 计算出 $\varepsilon_r = 2.22$ 和 $\varepsilon_r = 9.60$ 时悬置微带线特性阻抗 $Z_c$ 与宽度 $w$ 的关系, 并与有限差分法计算结果对比, 结果显示两者吻合得很好。

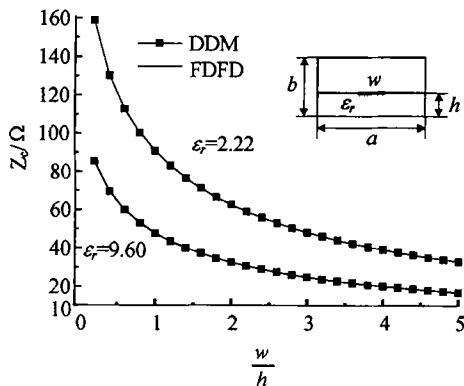


图2 屏蔽微带线的特性阻抗

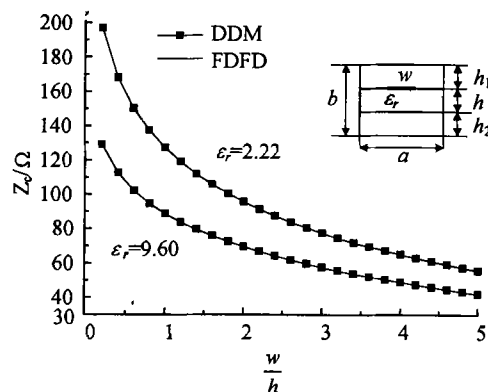


图3 悬置微带线的特性阻抗

为了研究DDM的收敛性与计算效率, 在图2的结构中取 $\varepsilon_r = 2.22$ ,  $w/h = 1.0$ , 区域划分为相等且重叠的左右两个区域, 重叠区域宽度为 $p/h$ , 用以研究DDM的收敛性与计算效率, 表1给出了重叠区域大小与DDM迭代次数的关系以及计算时间, 运行环境为Pentium 586/MMX 166。结果表明, 随着重叠区域的增大, DDM的迭代次数减少, 即收敛加快, 这与文献[2]的结论是一致的。另外, 一般迭代解的计算量为 $O(N^2)$ ,  $N$ 为未知量个数, 区域划分为两个大小相等的子区域后, 由于区域的重叠, 子域内未知量个数大于 $N/2$ , 即一次DDM迭代在每个子域内的计算量都大于 $O(N^2/4)$ 。而实际算法需要两个子区域相互交换信息, DDM迭代次数至少为2次。故此时DDM的计算量最少不低于 $O(N^2)$ , 通常比一般迭代法的计算量要大, 图2结构采用FD计算的CPU时间为11 s, 与表1比较证明了这一结论。DDM算法虽然可以降低计算复杂性和计算规模, 并可以通

过并行算法提高计算效率，因此，只有在子区域上寻求快速算法才能在串行机上提高计算效率，并且对提高并行计算效率也有重要意义。

表1 DDM 迭代次数和 CPU 时间

重叠区域大小	DDM 迭代次数	CPU 时间/s
0.6	16	34.21
1.0	10	26.81
2.0	6	20.60
4.0	4	18.29
6.0	3	17.51
9.0	2	16.70

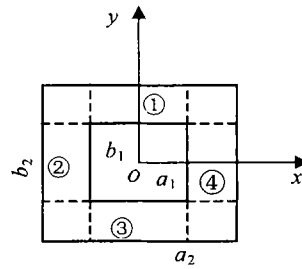


图 4 矩形同轴线分成四个子区域

图4所示是矩形同轴线，其中  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $s = (a_1 + a_2) / a_1$ ，对于这样一个复杂区域，利用 DDM 的特点，将其划分为4个相互重叠的矩形区域，在4个矩形区域上即可采用 FFT 快速算法计算出不同尺寸的矩形同轴线的特性阻抗，并与文献[6]和有限差分法的结果比较如表2所示，这时计算的结构为  $s = 2:1$ ，为方便 FFT 计算取未知量个数以2为基。DDM 与 FD 的计算结果有相同的精度，与文献[6]的结果基本一致，其计算时间的比较见表3。采用 FFT 算法后，DDM 的计算效率大幅度提高，充分显示了 DDM 在解决复杂大型问题中的优越性。

表2 矩形同轴线的特性阻抗  $Z_c / \Omega (nx = ny = 240)$

尺寸	准确值 <sup>[6]</sup> / $\Omega$	FD/ $\Omega$	DDM/ $\Omega$
$s=5:4$	10.933	10.976 330	10.976 34
$s=2:1$	36.771	36.770 490	36.770 48
$s=5:2$	49.754	49.769 670	49.769 57
$s=4:1$	77.630	77.683 370	77.683 38

表3 DDM 与 FD 的计算时间比较

子区域网格数 $nx=ny$	DDM/s	FD/s
128	2.14	16.26
256	9.12	222.06
512	44.21	3 491.01
1 024	211.52	~

### 3 结 论

本文将区域分解法应用于电磁场领域，通过对准 TEM 传输线的分析，研究了区域分解法的收敛性及计算效率。数值结果表明，区域分解法的区域划分具有很大的任意性，子区域间重叠区域越大收敛速度越快。通过对规则子区域引入 FFT 快速算法，结果显示区域分解法具有很高的计算效率。由于区域分解法对于子区域划分的灵活性，使复杂工程问题可以划分成多个尽可能规则的子区域进行求解，这对于规模较大、结构复杂的微波毫米波混合集成电路和单片集成电路的分析与设计具有重要的意义。另外，区域分解法是在各子区域上相对独立地求解，容易实现异步并行算法，并适用于网络并行环境，为电磁场并行数值计算开辟了一个新的方向。

## 参 考 文 献

- 1 孙家昶, 张林波, 迟学斌, 等. 网络并行计算与分布式编程环境. 北京: 科学出版社, 1996
- 2 吕涛, 石济民, 林振宝. 区域分解算法——偏微分方程数值解新技术. 北京: 科学出版社, 1997
- 3 Spring C T, Cangellaris A C. Parallel implementation of domain decomposition methods for the electromagnetic analysis of guided wave systems. J Electromagnetic Waves and Application, 1995,9: 175~192
- 4 Zhu Zhenhai, Hao ji, Wei Hong. An efficient algorithm for the parameter extraction of 3-D interconnect structures in the VLSI circuits: domain-decomposition method. IEEE MTT, 1997,45: 1 179~1 184
- 5 龙毅, 徐军, 朱汉清. 规则区域上 Helmholtz 方程的一种快速算法. 电子科技大学学报, 1999, 28(4): 383~387
- 6 林为干. 微波理论与技术. 北京: 科学出版社, 1979

## Domain Decomposition Method Combining with FFT for Analysis of TEM Transmission Line

Long Yi    Xu Jun    Xue Liangjin

(Inst. of Applied Physics, UEST of China    Chengdu    610054)

**Abstract** This paper presents domain decomposition method which is applied in the analysis of electromagnetic problems. The characteristic impedance of quasi TEM transmission lines are calculated by this method. The convergence property and computational efficiency of DDM are studied. The characteristic impedance of rectangular coaxial line is computed by fast Fourier transforms on divided several regular domain. The numerical results obtained show that DDM reduce both the computational complexity and computing time.

**Key words** domain decomposition method; fast Fourier transform; TEM transmission lines; quasi TEM transmission lines