关于有限群的自同构群

朱 雯* 何明星
(四川工业学院 成都 610039)

【摘要】 分析了自同构群是循环群或三次对称群S_3的有限群；给出了自同构群是循环群的有限群的分类刻画；证明了自同构群是循环群的有限群仅有四类，并且是S_3的有限群的阶数形式及相关的一些结果。

关 键 词 有限群； 自同构群； 内自同构群； 循环群
中图分类号 O157

1 预备知识

设G是群，以Aut$G$表示G的自同构群，Inn$G$表示G的内自同构群，G的中心记为$C(G)$。生成元为a的循环群记作$\langle a\rangle$。若G是有限群，以$|G|$记G的阶。n元循环群记为Z_n。

设G是有限群，称G为p-群(p为素数)，如果$|G|=p^n$ (n>0)。设H是有限群的p-子群，称H为G的sylow p-子群，如果H的阶是G的阶的素因素分解中关于p的最高次幂。

引理 1[1] 设G是有限Abel群，$p_1,p_2,\cdots,p_n$是$|G|$的全部素因子，G_{p_i} ($1\leqslant i\leqslant n$) 是G的Sylow p_i-子群，则有直积分解

$$G=G_{p_1}\times G_{p_2}\times\cdots\times G_{p_i} \tag{1}$$

引理 2[1] 设G是Abel p-群，则有直积分解

$$G=Z_{p^{m_1}}\times Z_{p^{m_2}}\times\cdots\times Z_{p^{m_t}} \tag{2}$$

引理 3[2] 设G是循环p-群，$G=Z_{p^m}$，则

1) G的自同构群Aut$G$的阶是 $p^{m-1}(p-1)$;

2) Aut$Z_{p^n}=S\times T$，其中S是p^{n-1}阶Abel群，T是$p-1$阶循环群。

3) 如果p是奇素数，则S是循环群。如果p=2，则除去n=1或n=2(G=Z_2或Z_4)以外，S都不是循环群。

引理 4 设p是奇素数，则AutZ_{p^m}是循环群。

引理 5[3] 设G是循环群，则对于任意$|G|$的因数m，G只有一个m阶子群。

引理 6 设$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$是有限群的直积分解，令$\alpha_i\in\mathrm{Aut}G_i$ ($1\leqslant i\leqslant n$)，作对应$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\to\alpha$，其中$\alpha$是$G$的变换

$$\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\alpha_1(x_1),\alpha_2(x_2),\cdots,\alpha_n(x_n))$$

则$\alpha\in\mathrm{Aut}G$，由此得到的映射φ为：$\mathrm{Aut}G_1\times\mathrm{Aut}G_2\times\cdots\times\mathrm{Aut}G_n\to\mathrm{Aut}G$是单同态。因而可以视$\mathrm{Aut}G_1\times\mathrm{Aut}G_2\times\cdots\times\mathrm{Aut}G_n$为Aut$G$的子群。

引理 7 设$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$，若$|G_1|,\cdots,|G_n|$两两互素，则在引理6中得到的单同态$\varphi$是同构的，即$\mathrm{Aut}G\cong\mathrm{Aut}G_1\times\mathrm{Aut}G_2\times\cdots\times\mathrm{Aut}G_n$。

引理 8 设$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$，若$K_i$是$G_i$的子群，且$K_1,K_2,\cdots,K_n$互相同构，则$G$有$n$个互相同构的子群。

引理 9 设$G=Z_2\times Z_2$ 或 $G=Z_4\times Z_2$，则Aut$G$不是循环群。

引理 10[1] 设$G_1=\langle a\rangle, G_2=\langle b\rangle$是阶为$n$，$m$的循环群，如果($n$，$m$)=1，则$G_1\times G_2$是阶为$nm$的循环群。

1999年11月8日收稿
* 女 35岁 大学 讲师

2　自同构群是循环群的有限群

定理 1　设 G 是以下四个有限群之一：$Z_{p^n}, Z_{p^n}\times Z_2$($p$ 是奇素数)，Z_2，Z_4，则 Aut$G$ 是循环群。

证明　AutZ_2只含有一个元素，根据引理4可知，AutZ_{p^n}是循环群。根据引理，Aut$(Z_{p^n}\times Z_2)\cong$ Aut$Z_{p^n}\times$Aut$Z_2=$ AutZ_{p^n}，故 Aut$(Z_{p^n}\times Z_2)$也是循环群。AutZ_4 只有两个元素，因而必是循环群。

下面证明，在定理1 中列出的四个有限群是仅有的自同构群为循环群的有限群。

定理 2　设 G 是有限 Abel 群，若 Aut$G$ 是循环群，则$|G|$至多有一个奇素数因子。

证明　设 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 是$|G|$的所有奇素数因子，则根据引理1可知，G 有以下直积分解：$G=G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_t}$ 或 $G=G_2\times G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_t}$。因为 $p_i, p_j(i\neq j)$ 及2是两两互素的，所以根据引理7可知，有以下两种结果之一

$$\begin{cases}\text{Aut}G=\text{Aut}G_{p_1}\times\cdots\times\text{Aut}G_{p_t}\\ \text{Aut}G=\text{Aut}G_2\times\text{Aut}G_{p_1}\times\cdots\times\text{Aut}G_{p_t}\end{cases}\tag{3}$$

对于每一个 $G_p(p=p_1,p_2,\cdots,p_t)$，因为是 Abel$p$-群，故又有分解式

$$G_p=Z_{p^{m_1}}\times\cdots\times Z_{p^{m_s}}$$

根据引理6，AutG_p有子群同构于 Aut$Z_{p^{m_1}}\times\cdots\times$Aut$Z_{p^{m_s}}$。又根据引理3，$\left|\text{Aut}Z_{p^{m_i}}\right|=p^{m_i-1}(p-1)$，由于 p 是奇素数，所以 $p-1$是偶数。因而 Aut$Z_{p^{m_i}}$ 有二阶子群，故 AutG_p有二阶子群。这样，在式(3)中，右端每一个因子 AutG_{p_i} 都含有二个阶子群，因而根据引理8，Aut$G$ 至少含有 t 个二阶子群，由引理5知，必有 $t\leqslant 1$，故$|G|$至多有一个奇素数因子。

定理 3　设 G 是 Abel$p$-群($p\neq 2$)，若 Aut$G$ 是循环群，则 G 是循环群 Z_{p^m}。

证明　设 G 是 Abel$p$-群，根据引理2可知，$G=Z_{p^{m_1}}\times\cdots\times Z_{p^{m_s}}$，因此由引理6可得，Aut$Z_{p^{m_1}}\times\cdots\times$Aut$Z_{p^{m_s}}$ 同构于 Aut$G$ 的子群。因为 p 是奇数，故每一个 Aut$Z_{p^{m_i}}$ 有一个二阶子群，Aut$G$ 有 s 个二阶子群，$s\leqslant 1$，则$G=Z_{p^m}$。

定理 4　设 G 是 Abel2-群，若 Aut$G$ 是循环群，则 $G=Z_2$或 $G=Z_4$。

证明　根据引理2可得，$G=Z_{2^{m_1}}\times\cdots\times Z_{2^{m_s}}$，当 $m>1$时，$\left|\text{Aut}Z_{2^m}\right|=2^{m-1}$，因而仿照前面的讨论可知至多有一个 $m_i>1$，又由引理3可知，$m_i\leqslant 2$，则

$$G=Z_{2^2}\times Z_2\times\cdots\times Z_2 \text{ 或 } G=Z_2\times\cdots\times Z_2$$

对于第一种情形，由引理6可知 Aut$G$ 有一个子群同构于

$$\text{Aut}(Z_{2^2}\times Z_2)\times\text{Aut}Z_2\times\cdots\times\text{Aut}Z_2=\text{Aut}(Z_4\times Z_2)$$

根据引理9可知，Aut$(Z_4\times Z_2)$不是循环群，所以 Aut$G$ 也不是循环群，矛盾。因而这种形式只有 $G=Z_4$。对于第二种情形，由引理6可知，Aut$G$ 有一个子群同构于 Aut$(Z_2\times Z_2)$，这个自同构群也不是循环群。因而这种形式只有 $G=Z_2$。G 只有 Z_4和 Z_2两种。

定理 5　设 G 是有限群，G 的自同构群是循环群，当且仅当 G 是 $Z_{p^m}, Z_{p^m}\times Z_2$($p$ 是奇素数)Z_2，Z_4这四种群之一。

证明　设 Aut$G$ 是循环群，则 G 必是 Abel 群，因而根据定理2可知，$|G|$至多一个奇素数因子。设$|G|=p^n(p\neq 2)$，则 G 是 Abel p-群，$G=Z_{p^n}$ (定理3)。若$|G|=2^n$，则 G 是 Abel 2-群，G 是 Z_2或 Z_4。设 $G=G_p\times G_2$，因为$(|G_p|,|G_2|)=1$，故 Aut$G_p\times$Aut$G_2=$ Aut$G$，因此 AutG_p 及 AutG_2 都是循环群，$G_p=Z_{p^m}$(2.5)，$G_2=Z_2$ 或 Z_4。如果 $G=Z_{p^m}\times Z_4$，则 AutZ_{p^m} 有二阶子群。而 $\left|\text{Aut}Z_4\right|=2$，所以 Aut$G_p\times$Aut$G_4=$ Aut$G$ 有两个二阶子群，矛盾。因此这种情形只有 $G=Z_{p^m}\times Z_2$。这样就证明了 G

是Z_{p^m}，$Z_{p^m}\times Z_2$，Z_2，Z_4这四种群之一。反之，由定理1可知Z_{p^m}，$Z_{p^m}\times Z_2$，Z_2，Z_4这四种群的自同构群都是循环群。

3 自同构群是S_3的有限群

定理 6 设G是有限群，或$\mathrm{Aut}G=S_3$，$\mathrm{Inn}G\neq\mathrm{Aut}G$，则$G=Z_2\times Z_2$。

证明 因为$\mathrm{Inn}G$是$\mathrm{Aut}G$的真子群，而S_3的真子群是二阶或三阶的，故$\mathrm{Inn}G$是循环群。根据引理2可知G是Abel群；根据引理1可得，$G=G_{p_1}\times\cdots\times G_{p_t}$($G_{p_i}$是$G$的Sylow群)。因为$G_{p_1},G_{p2},\cdots,G_{p_t}$的阶两两互素，故由引理7可知，$\mathrm{Aut}G\cong\mathrm{Aut}G_1\times\cdots\times\mathrm{Aut}G_t$。因为$\mathrm{Aut}G=S_3$不能分解成非平凡正规子群的直积，除去一个以外，所有$\mathrm{Aut}G_i=\{1\}$。根据引理8可得，$G_i=Z_2$，由此可知$|G|$只有一个素因子或者$|G|$有两个素因子并且其中一个是2，因此$G=G_p$或$G=G_2$或$G=G_p\times Z_2$。

设$G=G_p\ (p\neq 2)$，$\mathrm{Aut}G=S_3$，将G分解为$G=Z_{p^{m_1}}\times\cdots\times Z_{p^{m_s}}$，故$\mathrm{Aut}Z_{p^{m_1}}\times\cdots\times\mathrm{Aut}Z_{p^{m_s}}$是$\mathrm{Aut}G=S_3$的子群。因此除去一项外所有$\left|\mathrm{Aut}Z_{p^m}\right|=1$，因为$p\neq 2$，故$\left|\mathrm{Aut}Z_{p^m}\right|\neq 1$，$G=Z_{p^m}$，但$\mathrm{Aut}Z_{p^m}$是Abel群而不能是$S_3$。

设$G=G_2$，同上可证明G的分解式为：$G=Z_{2^m}\times Z_2\times\cdots\times Z_2$或$G=Z_2\times\cdots\times Z_2$。因为$\mathrm{Aut}Z_{2^m}\neq S_3$，$\mathrm{Aut}(Z_{2^m}\times Z_2)\neq S_3$，因此只能是$G=Z_2\times\cdots\times Z_2$($S$个因子)。由于$\mathrm{Aut}(Z_2\times Z_2)=S_3$，因此$G=Z_2\times Z_2$。

设$G=G_p\times Z_2$，则$\mathrm{Aut}G=\mathrm{Aut}G_p\times\mathrm{Aut}Z_2=\mathrm{Aut}G_p$。前面已证明了这个自同构群不是$S_3$，因此$G$只能是$Z_2\times Z_2$。

定理 7 设G是有限群，若$\mathrm{Inn}G=\mathrm{Aut}G=S_3$，则$|G|=2^n\cdot 3^n$。

参考文献

1 Jacobson N. Basic algebra. San Francisco : W H Freeman Company, 1974
2 张远达. 有限群构造. 北京: 科学出版社, 1982
3 Kurzweil H. Introduction to finite groups. New York: Springer, 1977

On Automorphism Groups of Finite Groups

Zhu Wen He Mingxing
(Sichuan University of Science and Technology Chengdu 610039)

Abstract In this paper, the finite groups whose automorphism group is a cyclic group or S_3 are discussed and the classification of such groups is given. It is proved that the finite groups whose automorphism group is a cyclic group can be classified into four classes.

Key words finite group; automorphism group; inner-automorphism group; cyclic group