Fuzzy值连续函数与Fuzzy值函数的序列收敛

郭双冰*
(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 利用Fuzzy数的Fuzzy距离定义了Fuzzy值连续函数的序列收敛，证明了Fuzzy值连续函数与Fuzzy值连续函数的和差仍是Fuzzy值连续函数；如果Fuzzy值函数序列的每项Fuzzy值连续，则其极限也Fuzzy值连续；在一致连续的条件下，积分号和极限号、微分号和极限号可交换.

关 键 词 模糊值函数； 模糊值连续函数； 序列收敛； Fuzzy距离
中图分类号 O159

1 概 述

模糊数学的分析理论是模糊数学的重要分支，已得到越来越广泛的应用[1, 2]。近年来，国内外学者在这方面做了许多工作。文献[3]讨论了Fuzzy级数；文献[4]修改了Fuzzy级数的收敛定义，并作了研究；文献[5]对Fuzzy数、Fuzzy数列、Fuzzy幂级数作了研究。但文献[3~5]在Fuzzy度量空间的建立上都没摆脱实数的束缚，而是以实数作为两个Fuzzy数间的度量。本文利用文献[6]给出的模糊数间的模糊距离对Fuzzy值连续函数与Fuzzy值函数的序列收敛进行了研究，文中采用的符号参照文献[5，7]。

定义 1[8] $F^*(R)$的代数算子$+,-$，$F^*(R)\times F^*(R)\to F^*(R)$定义如下

$$\forall\tilde{\eta},\tilde{\delta}\in F^*(R) \qquad t\in R \tag{1}$$

$$(\tilde{\eta}+\tilde{\delta})(t)=\sup_{s\in R}\{\tilde{\eta}(s)\wedge\tilde{\delta}(t-s)\} \tag{2}$$

$$(\tilde{\eta}-\tilde{\delta})(t)=\sup_{s\in R}\{\tilde{\eta}(s)\wedge\tilde{\delta}(s-t)\} \tag{3}$$

定义 2[6] X为R的子集，$\tilde{f}:X\to F^*(R)$，$x\to\tilde{f}(x)$，称$\tilde{f}$为定义在X上的Fuzzy值函数。记$\tilde{f}$的$\lambda-$截函数为$(\tilde{f}(x))_\lambda=[f_\lambda^-(x),f_\lambda^+(x)]$，其中$f_\lambda^-(x)$为左端点函数，$f_\lambda^+(x)$为右端点函数。

定义 3[7] 映射$\tilde{\rho}$：$(F^*(R)，F^*(R))\to F^*(R)$称为一个距离，如果满足：

1) $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\geqslant 0$，$\tilde{a}=\tilde{b}$ 当且仅当$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=0$；
2) $\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{a})$；
3) $\forall\tilde{c}\in F^*(R)$，有

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c})+\tilde{\rho}(\tilde{c}+\tilde{b}) \tag{4}$$

如果$\tilde{\rho}$是Fuzzy数的Fuzzy距离，则称$(R,F^*(R),\tilde{\rho})$是一个Fuzzy度量空间。

下面给出Fuzzy数的一种Fuzzy距离，本文以这种Fuzzy距离为基础。

定义 4[7] $\forall\tilde{a},\tilde{b}\in F^*(R)$，有

$$\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b})=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\left[\left|a_1^- - b_1^-\right|,\sup_{\lambda\leqslant\eta\leqslant 1}\left|a_\eta^- - b_\eta^-\right|\vee\left|a_\eta^+ - b_\eta^+\right|\right] \tag{5}$$

命题 1[7] $\forall\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\in F^*(R),\quad k\in R$，有

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}+\tilde{b},\tilde{a}+\tilde{c})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c}) \tag{6}$$

$$\tilde{\rho}(\tilde{a}-\tilde{b},\tilde{a}-\tilde{c})=\tilde{\rho}(\tilde{b},\tilde{c}) \tag{7}$$

$$\tilde{\rho}(k\tilde{a},k\tilde{b})=|k|\tilde{\rho}(\tilde{a},\tilde{b}) \tag{8}$$

1999年9月16日收稿
* 男 30岁 硕士 讲师

定义 5[8] 设 $\tilde{f}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的 Fuzzy 值函数，对任意 $\lambda\in(0,1]$，$f_\lambda^-(x)$，$f_\lambda^+(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则称 $\tilde{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积，其积分记作

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\left[\int_a^b f_\lambda^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b f_\lambda^-(x)\mathrm{d}x\right] \tag{9}$$

定义 6[9] 设 $\tilde{f}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的 Fuzzy 值函数，对任意 $\lambda\in(0,1]$，$f_\lambda^-(x)$，$f_\lambda^+(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导， 则称 $\tilde{f}$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\tilde{f}'(x)=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}[f'^-_\lambda(x)\wedge f'^+_\lambda(x),f'^-_\lambda(x)\vee f'^+_\lambda(x)] \tag{10}$$

式(10)为 $\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上的导函数，仍是 Fuzzy 值函数，其中 $f'^-_\lambda(x)$，$f'^+_\lambda(x)$ 为 x 的偏导数。

如果 $\forall\lambda\in(0,1],\forall x\in X,\ f'^-_\lambda(x)\leqslant f'^+_\lambda(x)$，则称 $\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上同序可导，如果 $\forall\lambda\in(0,1],\ \forall x\in X$，$f'^-_\lambda(x)\geqslant f'^+_\lambda(x)$，则称 $\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上反序可导。

2 Fuzzy 值连续函数与 Fuzzy 值函数的序列收敛

定义 7 设 $\tilde{f}$ 是定义在 X 上的 Fuzzy 值函数，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_0))<\varepsilon$，称 $\tilde{f}$ 在 x_0 点 Fuzzy 连续。如果对任意 $x\in X,\tilde{f}$ 在 x 点连续，则称 $\tilde{f}$ 是定义在 X 上的 Fuzzy 值函数。

定理 1 $\tilde{f}(x)$ 在 x_0 点 Fuzzy 连续 $\Leftrightarrow$ 当 $x\to x_0$ 时，$\forall\lambda\in(0,1]$，$f'^-_\lambda(x)$，$f'^+_\lambda(x)$ 对于 λ 一致收敛到 $f'^-_\lambda(x_0)$，$f'^+_\lambda(x_0)$。

证明 “$\Rightarrow$” 因为 $\tilde{f}(x)$ 在 x_0 点 Fuzzy 连续，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_0))<\varepsilon$，即 $\forall\lambda\in(0,1]$，有 $\sup\limits_{\lambda\leqslant\eta\leqslant1}\left|f_\eta^-(x)-f_\eta^-(x_0)\right|\vee\left|f_\eta^+(x)-f_\eta^+(x_0)\right|<\varepsilon$。因而 $\forall\lambda\in(0,1]$，$\left|f_\eta^-(x)-f_\eta^-(x_0)\right|<\varepsilon$，$\left|f_\eta^+(x)-f_\eta^+(x_0)\right|<\varepsilon$，因此当 $x\to x_0$ 时，$f'^-_\lambda(x)$，$f'^+_\lambda(x)$ 对于 λ 一致收敛到 $f'^-_\lambda(x_0)$，$f'^+_\lambda(x_0)$。“$\Leftarrow$” 因 $x\to x_0$ 时，有 $\forall\lambda\in(0,1]$，$f'^-_\lambda(x)$，对于 λ 一致收敛到 $f'^-_\lambda(x_0)$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1$，当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时， $\forall\lambda\in(0,1]$， $\left|f_\eta^-(x)-f_\eta^-(x_0)\right|<\varepsilon$。同理 $x\to x_0$ 时，$\forall\lambda\in(0,1]$，$f'^+_\lambda(x)$，对于 λ 一致收敛到 $f'^+_\lambda(x_0)$，因此对上面的 $\varepsilon>0,\exists\delta_2$，当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，$\left|f_\eta^+(x)-f_\eta^+(x_0)\right|<\varepsilon$。取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $\sup\limits_{\lambda\in(0,1]}\left|f_\lambda^-(x)-f_\lambda^-(x_0)\right|\vee\left|f_\lambda^+(x)-f_\lambda^+(x_0)\right|<\varepsilon$，因而 $\tilde{\rho}(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_0))<\varepsilon$，即 $\tilde{f}(x)$ 在 x_0 点 Fuzzy 连续。

定理 2 $\tilde{f}(x),\tilde{g}(x)$ 在 x_0 点 Fuzzy 连续，则 1) $\tilde{f}(x)\pm\tilde{g}(x)$ 也在 x_0 点 Fuzzy 连续；2) $\forall\alpha\in R,\alpha\tilde{f}(\alpha)$ 也在 x_0 点 Fuzzy 连续。

证明 利用式(7)~(9)容易证明定理2成立。

定义 8 设 $\{\tilde{f}_n\}$ 为 Fuzzy 值函数序列，$\tilde{f}$ 为 Fuzzy 值函数，如果 $\forall x\in X,\forall\varepsilon>0,\exists N(x)$，当 $n>N$ 时，$\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon$，则称 $\{\tilde{f}_n\}$ 收敛于 $\tilde{f}$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n=\tilde{f}$。

定理 3 设 $\{\tilde{f}_n\}$，$\tilde{f}$ 为 Fuzzy 值函数，则 $\{\tilde{f}_n\}$ 收敛于 $\tilde{f}$ 的充要条件是 $\forall x\in X$，$\{\tilde{f}^-_{n\lambda}(x)\}$ 和 $\{\tilde{f}^+_{n\lambda}(x)\}$ 关于 $\forall\lambda\in(0,1]$，分别一致收敛于 $f_\lambda^-(x)$ 和 $f_\lambda^+(x)$。

证明 “$\Rightarrow$” 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x)=\tilde{f}(x)$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N(x)$，当 $n>N$ 时，$\tilde{\rho}(\tilde{f}_n(x),\tilde{f}(x))<\varepsilon$。即 $\forall\lambda\in(0,1]$，$\sup\limits_{\lambda\in(0,1]}\left|f_{n\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)\right|\vee\left|f_{n\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)\right|<\varepsilon$，因而 $\forall\lambda\in(0,1]$，$\left|f_{n\lambda}^-(x)-f_\lambda^-(x)\right|<\varepsilon$ 和 $\left|f_{n\lambda}^+(x)-f_\lambda^+(x)\right|<\varepsilon$。故 $\{f_{n\lambda}^-(x)\}$ 和 $\{f_{n\lambda}^+(x)\}$ 关于 $\forall\lambda\in(0,1]$，分别一致收敛于 $f_\lambda^-(x)$ 和 $f_\lambda^+(x)$。“$\Leftarrow$” $\forall x\in X,\{\tilde{f}^-_{n\lambda}(x)\}$ 关于 $\lambda\in(0,1]$ 一致收敛于 $f_\lambda^-(x)$，故 $\forall\lambda\in(0,1]$，$\forall\varepsilon>0,\exists N_1(x)$，当 $n>N_1$ 时，

$\left|f_{n\lambda}^{-}(x)-f_{\lambda}^{-}(x)\right|<\varepsilon$，同时$\{f_{n\lambda}^{+}(x)\}$关于$\forall\lambda\in(0,1]$，一致收敛于$f_{\lambda}^{+}(x)$。因此$\forall\lambda\in(0,1]$，$\forall\varepsilon>0,\exists N_2(x)$，当$n>N_2$时，$\left|f_{n\lambda}^{+}(x)-f_{\lambda}^{+}(x)\right|<\varepsilon$。

取$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n>N$时，$\sup\limits_{\lambda\in(0,1]}\left|f_{\lambda}^{-}(x)-f_{\lambda}^{-}(x_0)\right|\vee\left|f_{\lambda}^{+}(x)-f_{\lambda}^{+}(x_0)\right|<\varepsilon$。因而$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{f}_n=\widetilde{f}$。

定理 4 设$\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{f}_n=\widetilde{f}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{g}_n=\widetilde{g},\alpha\in R$，则

$$\lim_{n\to\infty}(\widetilde{f}_n+\widetilde{g}_n)=\widetilde{f}+\widetilde{g} \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\widetilde{f}_n-\widetilde{g}_n)=\widetilde{f}-\widetilde{g} \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha\widetilde{f}_n=\alpha\widetilde{f} \tag{13}$$

定义 9 设$\{\widetilde{f}_n\}$，$\widetilde{f}$为Fuzzy值函数，如果$\forall\varepsilon>0$，存在只依赖于ε的正整数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，$\forall x\in X$，$\widetilde{\rho}(\widetilde{f}_n(x),\widetilde{f}(x))<\varepsilon$，则称$\{\widetilde{f}_n\}$一致收敛于$\widetilde{f}$，记为$\widetilde{f}_n\to\widetilde{f}$(一致收敛)$(n\to\infty)$。

定理 5 $\{\widetilde{f}_n\}$，$\widetilde{f}$为Fuzzy值函数，$\widetilde{f}_n$一致收敛的充要条件是二元函数$\{\widetilde{f}_{n\lambda}^{-}(x)\}$和$\{\widetilde{f}_{n\lambda}^{+}(x)\}$对$\forall x\in X$，$\forall\lambda\in(0,1]$一致收敛于$f_{\lambda}^{-}(x)$和$f_{\lambda}^{+}(x)$。

定理 6 若在$[a,b]$上，Fuzzy函数列$\{\widetilde{f}_n(x)\}$的每项$\widetilde{f}_n(x)$都Fuzzy连续，并且$\widetilde{f}_n(x)\to\widetilde{f}(x)(n\to\infty)$，则其极限函数$\widetilde{f}(x)$也在$\widetilde{f}(x)$上Fuzzy连续。

定理 7 设$\{\widetilde{f}_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$\widetilde{f}(x)$，每项$\widetilde{f}_n(x)$都在$[a,b]$上Fuzzy连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\widetilde{f}_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\widetilde{f}(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}_n(x)\mathrm{d}x \tag{14}$$

定理 8 若在$[a,b]$上Fuzzy函数列$\{\widetilde{f}_n(x)\}$的每项$\widetilde{f}_n(x)$都有Fuzzy连续同序导数，$\widetilde{f}_n(x)$收敛于$\widetilde{f}(x)$，$\{\widetilde{f}_n'(x)\}$一致收敛于$\widetilde{\sigma}(x)$，则$\widetilde{f}'(x)=\widetilde{\sigma}(x)$，亦即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{f}(x) \tag{15}$$

参考文献

1 舒 兰. 关于Fuzzy3属性文法与Fuzzy自动机. 电子科技大学学报, 1991, 20(2): 84~87

2 舒 兰. L-Fuzzy拓扑共生结构的有界性. 电子科技大学学报, 1991, 20(10): 537~540

3 万大成, 刘 锐. Fuzzy级数(I). 模糊数学, 1984, (4): 61~70

4 赵汝怀. Fuzzy级数的收敛性. 模糊数学, 1987, (1): 37~38

5 姜华彪. 关于Fuzzy级数的若干结果. 模糊系统与数学, 1987, (1): 80~89

6 张广全. Fuzzy数的Fuzzy距离与Fuzzy极限. 模糊系统与数学, 1992, 6(1): 21~27

7 罗承忠, 王德谋. 区间值函数积分的推广与Fuzzy值函数的积分. 模糊数学, 1983, (3): 45~52

8 Goestshel Roy Jr, Voxman Wllian. Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems, 1996,(18): 31~43

9 Dubois D, Prade H. Towards fuzzy differential calculus, Part 3:differential. Fuzzy Sets and Systems, 1982, 18(1): 225~235

Fuzzy Continuous Functions and Sequent Convergence of Fuzzy Functions

Guo Shuangbing

(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　The distance of fuzzy numbers is used to define both the fuzzy continuous functions and the sequent convergence of fuzzy functions. Their properties are also investigated. The results show that both the sum / difference of fuzzy continuous functions are fuzzy continuous functions and if each term is fuzzy continuous functions in sequence of fuzzy functions, its limit is also fuzzy continuous. In case of consistent continuous functions, integral sign and limit sign are interchangeable, so are differential sign and limit sign.

Key words　fuzzy functions;　fuzzy continuous functions;　sequent convergence;　fuzzy distance

· 科研成果介绍 ·

红外无线语言教学系统

主研人员：唐　广　陈永清　曾　洁　俞祖英　王兆明

红外无线语言教学系统实现了将红外光作为载体应用于语言教学系统的方案，开发成功的教学系统具有一般无线语言教学不具备的双向功能。用红外语言教学系统代替传统的语音系统大大降低了设备费和维护费用，可在普通教室进行语言教学，大大提高了学校教室的利用率，该系统语言清晰，使用方便，是语言教学系统的一种换代产品。

网络环境下高速公路收费与监控系统

主研人员：秦志光　张凤荔　朱乃文　梁　军　何兴高等

网络环境下高速公路收费与监控系统采用人口发卡、出口收费、全路内一卡通用的计算机收费方式。整个系统由收费中心、收费分中心、收费站、收费车道、CCTV 监控、网络通信六部分软件组成。其计算机网络由广域网与局域网相结合的方式组成，设计思想先进，功能完善，系统的开放性、可扩性好，安全可靠，可最大限度地防止徇私舞弊现象。该系统可获取和管理车辆的图像信息，为管理决策层提供各种相关信息，是国内自主开发的一套成功的应用软件。

·科　卞·