# 一类具有时滞的神经网络的稳定性分析*

朱文莉**
(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】 对具有广泛应用价值的时滞 Hopfield 神经网络系统，建立了系统平衡点存在唯一的充要条件，利用常数变易法并结合不等式分析技巧讨论了神经网络模型的全局指数稳定性，获得了系统的平衡点全局指数稳定的充分条件。

关 键 词 时滞； 神经网络； 平衡点； 稳定性
中图分类号 O231

近年来，人工神经网络的理论与应用研究在国际上形成了新的热点，有关专家致力于这方面的研究，以期为新一代智能计算机的研究奠定基础[1~10]。人工神经网络系统是在现代神经生物学和神经心理学研究基础上模仿人的大脑神经元结构特征和功能特征而建立起来的一种非线性系统，现已提出很多有应用背景的神经网络系统，其中最有代表性的是连续的 Hopfield 神经网络[7]，它的一个重要应用是最优化的计算。为了避免局部极小，对于最优化计算的神经网络，理想的情形是只有一个全局稳定的平衡点，因而对于神经网络平衡点存在唯一性的研究是一件很有意义的工作，但现有的文献中所建立的关于神经网络平衡点存在唯一的条件大多是充分条件[1~6]，充要条件给出的很少，而且仅给出了非时滞型的神经网络的充要条件，至于时滞型的充要条件却很少见到。基于这种情况，本文应用矩阵理论、常数变易法并结合不等式分析技巧，建立了具有时滞的连续型 Hopfield 神经网络的平衡点存在唯一的充要条件及其稳定性，文中所建立的条件简明且易验证。

## 1 系统的描述与准备

考虑具有时滞的连续 Hopfield 型神经网络

$$\dot{x}_i = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\sigma_j[x_j(t)] + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\sigma_j[x_j(t-\tau)] + b_i \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其等价的矩阵形式为

$$\dot{x} = -Dx(t) + B\sigma[x(t)] + C\sigma[x(t-\tau)] + b \tag{2}$$

式中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in R^n$ 是网络的状态变量 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$， $d_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 是权矩阵，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 为阀值，$\tau_i \geqslant 0$ 是滞后，并令 $\tau=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\tau_i\}$。$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 为阀值，系统满足的初始条件为

$$x_i(t)=\varphi_i(t) \qquad -\tau\leqslant t\leqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$\varphi_i(t)$ 在 $[-\tau,0]$ 的上连续有界，且满足

$$\|\varphi\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sup_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}\{|\varphi_i(t)|\}$$

$\sigma(x)=(\sigma_1(x_1),\sigma_2(x_2),\cdots,\sigma_n(x_n))^T$，$\sigma_i$ 为激活函数，$\sigma_i$ 通常取为 $S$ 函数，对 $\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 应满足：1) 当 $x\to\pm\infty$ 时，$\sigma_i(x)\to\pm1$；2) $\sigma_i(x)$ 的上、下界分别为 $+1,-1$；3) $\sigma_i(x)=0$，当且仅当 $x=0$；4) $\sigma_i'(x)>0$ 和 $\sigma_i'(x)\to 0$；5) 当 $x=0$ 时，$\sigma_i'(x)$ 取得全局最大值 $c_i\leqslant 1$。

1999年12月5日收稿
* 国家自然科学基金资助项目，基金号：6987100
** 女 32岁 在职硕士生 讲师

例如函数 $g_1(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，$g_2(x)=\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{2x}{\pi}$，$g_3(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$，$g_4(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{sign}(x)$ 等均满足上述要求。

**引理**　设 $\sigma_i$ 在 $x>0$ 是上凸函数，在 $x<0$ 是上凹函数，则对 $\forall a_i\in(0,c_i)$，都有 $\exists x_i,y_i\in R$，使

$$\sigma_i(x_i)-\sigma_i(y_i)=a_i(x_i-y_i)\qquad i=1,2,\cdots,n$$

证明　当 $x_i=y_i$ 时，结论显然成立；当 $x_i\neq y_i$ 时，不妨设 $x_i>y_i$，对于 $\forall a_i\in(0,c_i)$，可设 $u_i(x_i)=\sigma_i(x_i)-a_ix_i$，由 $\sigma_i$ 满足的条件可知，$\exists\xi_i>0$，使

$$u_i(x_i)>0\ (0<x_i<\xi_i)\qquad u_i(\xi_i)=0$$

考虑辅助函数

$$f_i(x_i)=\sigma_i(x_i+z_i)-\sigma_i(x_i)-a_iz_i$$

式中　$z_i\in(0,\xi_i)$。由连续函数的介质定理，可知存在 $y_i>0$，使 $f_i(y_i)=0$，令 $x_i=y_i+z_i$，即 $z_i=x_i-y_i$，于是可得引理成立。

由引理可知，对 $\forall A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $a_i\in(0,c_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\exists x,y\in R^n$，使

$$\sigma(x)-\sigma(y)=A(x-y)\tag{3}$$

对 $\forall z_i\in R$，均存在 $r_i>0$，有 $x_i-y_i=r_iz_i$（$z_i$ 与 $x_i-y_i$ 同号），于是式(3)又可表示为

$$\sigma(x)-\sigma(y)=A(x-y)=Arz\tag{4}$$

式中　$r=\mathrm{diag}(r_1,r_2,\cdots,r_n)$。

因而，前面所取的 $\sigma$ 函数 $g_1(x),g_2(x),g_3(x),g_4(x)$ 均满足引理的条件，因此满足引理条件的函数是一类非常广泛的函数。

## 2　系统平衡点的存在唯一性

**定理 1**　系统(1)存在平衡点。

**定理 2**　若 $\|\sigma(x)-\sigma(y)\|\leqslant l\|x-y\|$，$\|D^{-1}(B+C)\|l<1$，$l>0$ 为常数，则系统(1)的平衡点存在唯一。

证明　由定理1可知系统(1)的平衡点存在，下面证明唯一性。任取 $x,y$ 都是系统(1)的平衡点，则有

$$x=D^{-1}[(B+C)\sigma(x)+b]$$

$$y=D^{-1}[(B+C)\sigma(x)+b]$$

$$\|x-y\|=\|D^{-1}(B+C)[\sigma(x)-\sigma(y)]\|\leqslant\|D^{-1}(B+C)\|l\|x-y\|<\|x-y\|$$

可知 $x=y$，即平衡点是唯一的。

**定理 3**　设系统(1)中的 $\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $x>0$ 是上凸函数，在 $x<0$ 是上凹函数，则 $\forall b\in R^n$，系统(1)存在唯一的平衡点的充要条件是 $D-(B+C)M\in\varphi$，其中 $M=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$\varphi$ 表示所有主子式大于等于零的矩阵类[8]。

证明　必要性　若系统(1)对 $\forall b\in R^n$ 存在唯一的平衡点 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$，$x$ 则有

$$-Dx^*+B\sigma(x^*)+C\sigma(x^*)+b=0$$

$\forall A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$0<a_i<c_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，由引理可知，$\exists x,y\in R^n$ $(x\neq y)$，使 $\sigma(x)-\sigma(y)=A(x-y)$，从而有

$$-Dx+B\sigma(x)+C\sigma(x)+b=a_x$$

$$-Dy+B\sigma(y)+C\sigma(y)+b=a_y$$

由于 $x\neq y$，所以 $a_y\neq a_x$，否则与平衡点唯一矛盾。记 $a=a_y-a_x$，于是有

$$D(x-y)-(B+C)[\sigma(x)-\sigma(y)]=[D-(A+C)A](x-y)=a$$

对 $\forall z\neq 0,\quad z\in R^n$，有 $x-y=rz$，于是有 $[D-(B+C)A]rz\neq 0$，故 $[D-(B+C)A]rz=0$ 只有零解 $z=0$，故 $\det[D-(B+C)A]r\neq 0$，得 $\det[D-(B+C)A]\neq 0$。易证 $\det[D-(B+C)A]>0$，从而能证得 $D-(B+C)M\in\varphi$ 。充分性的证明从略。

## 3 系统的稳定性分析

令 $y_i=x_i-x_i^*$，则系统(1)变为

$$\dot{y}_i=-d_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j[y_j(t)]+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}f_j[y_j(t-\tau_j)]\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

式中 $f_i(y_i)=\sigma_i(x_i)-\sigma_i(x_i^*)=\sigma_i(y_i+x_i^*)-\sigma_i(x_i^*)$，且 $|f_i(y_i)|\leqslant c_i|y_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

**定理 4** 设系统(5)满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}c_j(|b_{ij}|+|c_{ij}|)<d_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则系统(1)的平衡点 $x=x^*$ 是全局指数稳定的。

**证明** 利用常数变易法可得

$$y_i(t)=\mathrm{e}^{-d_it}y_i(0)+\mathrm{e}^{-d_it}\int_0^t\mathrm{e}^{d_is}\sum_{j=1}^{n}\{b_{ij}f_j[y_j(s)]+c_{ij}f_j[y_j(s-\tau_j)]\mathrm{d}s\}$$

两边取绝对值可得

$$|y_i(t)|\leqslant\mathrm{e}^{-d_it}\|\varphi\|+\mathrm{e}^{-d_it}\int_0^t\mathrm{e}^{d_is}\sum_{j=1}^{n}c_j[|b_{ij}||y_j(s)|+|c_{ij}||y_j(s-\tau_j)|]\,\mathrm{d}s$$

令
$$p_i(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-d_it}\|\varphi\|+\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\int_0^t\mathrm{e}^{-d_i(t-s)}[|b_{ij}||y_j(s)|+|c_{ij}||y_j(s-\tau_j)|]\,\mathrm{d}s & t\geqslant 0\\ \|\varphi\| \quad -\tau\leqslant t\leqslant 0\end{cases}$$

则 $|y_i(t)|\leqslant p_i(t)$ $(t\geqslant-\tau_i;\quad i=1,2,\cdots,n)$。当 $t\geqslant 0$ 时，$p_i(t)$ 对 $t$ 求导可得

$$\dot{p}_i(t)\leqslant-d_ip_i(t)+\sum_{j=1}^{n}c_j[|b_{ij}|p_j(t)+|c_{ij}|p_j(t-\tau_j)]\qquad i=1,2,\cdots,n$$

由定理的条件，对充分小的 $\varepsilon>0$，使

$$\sum_{j=1}^{n}c_j(|b_{ij}|+|c_{ij}|\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_j})-d_i+\varepsilon<0\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

设 $S_i(t)=p_i(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，对 $S_i(t)$ 求导，有

$$\dot{S}_i(t)\leqslant-(d_i-\varepsilon)S_i(t)+\sum_{j=1}^{n}c_j[|b_{ij}|S_j(t)+|c_{ij}|\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_j}S_j(t-\tau_j)]\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

**证明** 对 $\forall t\geqslant 0$，有

$$S_i(t)\leqslant\|\varphi\|\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

**证明** 对 $\forall d>1$，有

$$S_i(t)<d\|\varphi\|\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

对 $\forall t\in[-\tau,0]$，有

$$S_i(t)=p_i(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\leqslant\|\varphi\|<d\|\varphi\|$$

如果式(9)不成立，必存在 $t_1>t_0$ 及某个 $i$，使

$$S_i(t_1)=d\|\varphi\|\qquad S_j(t)=\begin{cases}<d\|\varphi\| & -\tau\leqslant t<t_1 & j=i\\ \leqslant d\|\varphi\| & -\tau\leqslant t\leqslant t_1 & j\neq i\end{cases}$$

从而有 $\dot{S}_i(t_1)\geqslant 0$。另外，由式(7)，有

$$\dot{S}_i(t_1) \leqslant -\left[(d_i - \varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} c_j(|b_{ij}| + |c_{ij}| e^{\varepsilon \tau_j})\right] d\|\varphi\| < 0$$

矛盾，因此，式(9)成立，在式(9)中，令 $d \to 1$，可知式(8)成立，于是有

$$|y_i(t)| \leqslant p_i(t) = S_i(t) e^{-\varepsilon t} \leqslant \|\varphi\| e^{-\varepsilon t} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

所以系统(5)的零解是全局指数稳定的，从而系统(1)的平衡点 $x = x^*$ 是全局指数稳定的。

## 参 考 文 献


1 Forti M, Tesi A. New conditions for global stability of neural networks with appplication to linear and quadratic programming problems. IEEE Trans Circuits Syst I,1995,42(7): 354~366

2 Jin L, Gupta M M. Globally asymptotical stability of discrete–time analog neural networks. IEEE Trans Neural Networks ,1996, 7(4): 1 024~1 031

3 Jin L, Nikifor P N, Gupta M M. Absolute stalility conditions for discrete–time recurrmt neural networks. IEEE Trans Neural networks,1994,5: 945~955

4 Liao X X, Mao X. Stability of stochastic neural networks. Neural, Parallel & Scientific computations, 1996, 4: 205~224

5 Liao X X, Mao X. Exponential stability and instability of stochastics neural nerworks. Stochastic Analysis and Applications , 1996, 14(2): 165~185

6 廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性. 中国科学(A 辑), 1993, 23(10): 1 025~1 035

7 Hopfield J. Neutons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons. In Proc Nat Acad Sci,1984, 81: 3 088~3 092

8 陈公宁. 矩阵理论与应用. 北京: 高等教育出版社, 1990

9 钟守铭. Hopfield 神经网络 $k$-全局稳定性. 电子科技大学学报, 1995,12(6): 647~651

10 钟守铭. 通有连续时间神经网络的稳定性. 电子科技大学学报, 1996, 25(1): 92~97


# Stability Analysis of Time-delay Hopfield Neural Networks


Zhu Wenli

(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)



**Abstract** This paper studies time-delay neural networks, and establishes the necessary and sufficient condition for the existence and unique of the nerwork's equilibrium point. According to the matrix theory, the method of variations of the parameters and the method of inequality analysis, the sufficient conditions of globally exponential stability of time-delay Hopfield neural networks is established.



**Key words** time-delay; neural networks; equilibrium point; stability