

# Turbo 码多级调制及性能分析\*

张中培\*\* 杨虹

(电子科技大学应用物理系, 电子工程学院 成都 610054)

**【摘要】** 提出了将 Turbo 码运用于多级调制的码设计和多步译码方法。根据信息理论, 将每级 Turbo 码设计出不同码率, 使低层码具有较高的纠错能力, 而高层码具有较高的传输信息能力, 从而提高系统传输率。对 Turbo 码多级调制的误码性能进行了分析, 得出误码率计算公式, 并对 Turbo 码调制方案进行了仿真, 证明了结论的正确性。

**关键词** 多级码; 多步译码; 码重分布; Turbo 码

**中图分类号** TN911.22

通过编码提高通信服务质量是现代通信中的一种常用方法<sup>[1]</sup>, Turbo 码是一种并行级联编码方法, 由于该码具有接近 Shannon 限的编码特性而受到普遍关注。自 Turbo 码与网格编码调制相结合的 TCM 方案提出后, 通过对其结果进行的计算机模拟, 证明了 Turbo 码在有限带宽信道中同样具有良好的编码性能, 但都只是针对 8PSK 和 16QAM 调制以 Ungerboeck 分集原理为基础的构成方法和性能模拟, 未对更一般的多级调制构成方法及性能进行理论分析, 更未对能量及带宽有限 TCM 的误码率限进行分析和计算。文献[2]提出了用 Turbo 码构成多级码的调制方案, 本文以此为基础, 提出了用 Turbo 码构成多级调制的一般规律, 并根据 Turbo 码的重量分布规律, 得到了 Turbo 码多级调制的误码率计算公式, 其中 Turbo 码的交织器设计已在文献[3]中进行了讨论。

## 1 Turbo 多级码调制

自 Imai 和 Hirakawa 提出多级编码后<sup>[4]</sup>, 多级码作为差错控制与调制相结合的有效方法, 将信号星座分割成子集, 然后与差错码进行组合。一种最典型的  $L$  级分集链  $S_0/S_1 \cdots /S_L$  由 Ungerboeck 得出, 由此提出了多级调制码的一种特例网格编码调制, 多级码编译码结构如图1和图2所示。

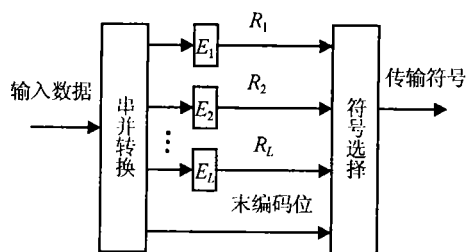


图1 多级码编码

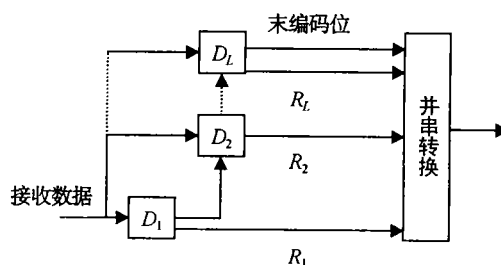


图2 多级码译码

在图1中, 与分集相联的是一个二进制码字,  $E_i$  为相应的编码器, 编码可以是卷积码、分组码或卷积码与分组码的组合。图2中的  $D_i$  为译码器, 由模拟似然译码和  $E_i$  编码的对应译码组成。编码可以是任意码, 故本文采用 Turbo 码作为编码。Turbo 码是一种并行级联码结构, 它可以通过调节校验位的删除器而得到不同的码率, 故可实现多级码各级码率的调整。译码部分可采用软输出 Viterbi 译码(SOVA)或最大后验概率(MAP)迭代译码。

2000年2月12日收稿

\* 电子部预研基金资助项目

\*\* 男 33岁 在职博士生 讲师

## 2 Turbo 多级码设计方案

由信息理论知识可得, 将多级编码对应  $M=2^l$  进制调制方案与信号星座  $A$  对应<sup>[5]</sup>,  $A = \{a_m | m \in (0, 1, \dots, M-1)\}$  与分级编码一一映射。在一定编码长度  $n$ , 由信息理论对随机码编码, 有  $P_e \leq 2^{-nE_r(R)}$ , 其中  $E_r(R)$  为编码指数,  $P_e$  为误码率, 每一传输符号与调制星座中的子集点是等概率对应的。在一定的信道方差下, 可以由输出连续通道的概率密度函数得到适用于随机码的码率设计式

$$E_r'(R') = -\frac{\log_2 P_e}{n} = C \quad (1)$$

式中  $C$  为常数。由此可得 Turbo 多级调制的码率设计规律为: 在给定多级码各级码长、最大容忍误码率  $P_e$  及信道方差  $\delta^2$  的条件下, 多级码方案的码率选择相应由随机码指数  $E_r'(R')$  决定, 且总码率  $R = \sum_i R_i$ 。以 16QAM 调制为例, 在  $P_e=10^{-4}$ , 码长  $n=2\ 000$  时, 等值  $E_r'(R')$  所对应的信道编码码率曲线如图 3 所示, 图中横坐标  $SNR = -20 \log_2(\delta/(d/2))$ ,  $d$  为每级对应 Ungerboeck 分集的最小欧氏距离。由图 3 可知, 在同样误码率和码长下, 随分集的增加, 欧氏距离就增加, 编码码率可选择得越大。当总码率一定时, 给定  $P_e$  和不同的码长  $N$ , 各级分量码的码率和码长的关系如图 4 所示。同样误码率下, 当码长大于  $10^3$  时, 对分量码码率大小的要求基本不变。因此, 对 Turbo 分量码构成多级码, 在交织长度大于  $10^3$  时, 增加码长对误码率的提高影响不大。对 Turbo 多级码, 理想的交织长度可选为  $1 \times 10^3 \sim 2 \times 10^3$  之间。

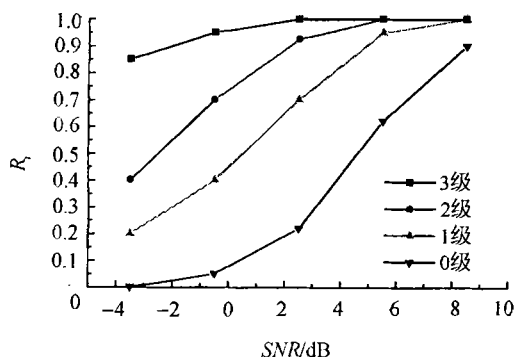


图3 16QAM 调制  $E_r'(R)$  等量线

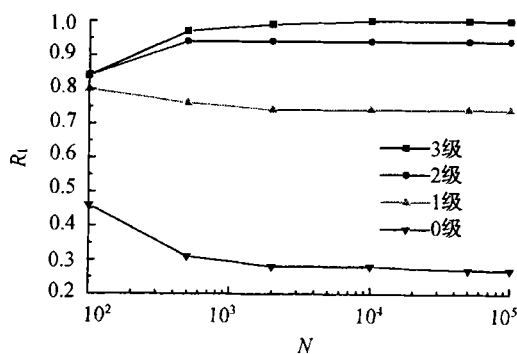


图4 码长与码率关系曲线

## 3 Turbo 多级码误码性能

在分析多级码系统时采用多步译码, 总的误码性能被每一分量码检测, 在某级  $i$  发生错误时, 假若  $i-1$  级译码是正确的, 考虑  $i$  级译码,  $i=1, 2, \dots, L$ 。当 Turbo 码长度为  $N^{(i)}$  时, 共有  $K$  个码字, 在  $i$  级为  $v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_{K-1}^{(i)}$ , 当传输码字  $v_0^{(i)}$  时, 如果第  $k$  个码字引译码错误, 并定义这事件为  $\varepsilon_k^{(i)}$ , 则均匀上限约束式为

$$P(\varepsilon^{(i)}) \leq \sum_{k=1}^{K-1} P(\varepsilon_k^{(i)}) \quad (2)$$

式中  $p(\varepsilon_k^{(i)})$  为  $v_0^{(i)}$  与  $v_k^{(i)}$  之间的海明距离  $w_k^{(i)}$  的函数;  $p(\varepsilon_k^{(i)})$  的主要项为  $w_k^{(i)}$  的降幂函数, 该约束限可简化为

$$P(\varepsilon_k^{(i)}) < (Z^{(i)})^{w_k^{(i)}} \quad (3)$$

式中  $Z$  为分集欧氏距离  $\delta_i^2$  和信道方差  $\sigma_i^2$  的函数。利用 Chernoff 限方法, 将式(3)代入式(2)可得

$$p(\varepsilon^{(i)}) \leq \sum_{k=1}^{K-1} (Z^{(i)})^{w_k^{(i)}} = \sum_{w=d_{\min}^{(i)}}^{N^{(i)}} a_w^{(i)} (Z^{(i)})^w \quad (4)$$

$$\exp\left(-\frac{\delta_l^2}{8\sigma^2}\right) \leq Z^{(l)} \leq 4 \exp\left(-\frac{\delta_l^2}{\sigma^2}\right) \quad (5)$$

而整个信道的误码率  $P$  由式(2)求和即得。由式(4)可知, 获得了 Turbo 码的重量分布式, 即可获得 Turbo 码多级调制整个系统的误码率公式。由两个 RSC 码构成 Turbo 码的重量分布函数为<sup>[6]</sup>

$$A^{C_p}(w, z) \approx \frac{w!}{n_{\max}!^2} N^{2n_{\max}-w-1} [A(w, z, n_{\max})]^2 \quad (6)$$

将式(6)代入式(4), 经化简可得到误码率限

$$P_{(e^{(l)})} = \sum_{k=1}^{\lfloor N^{(l)}/2 \rfloor} \binom{2k}{k} N^{-1} \left[ \frac{Z_{(l)}^{Z_{\min}}}{1 - Z_{(l)}^{Z_{\min}-2}} \right]^{2k} (Z_{(l)})^{2k} \quad (7)$$

式中  $Z_{\min} = (d_{\text{free,eff}} - 2)/2$ 。

## 4 Turbo码多级16QAM调制

以16QAM为例, 按上面的设计方法选取码率, 并按性能分析计算其误码率, 并对其结果进行仿真。对16QAM调制, 信道的最大容量为3 bit/symbol, 按此容量, 在图2中作出  $R=3$  的直线, 得到最理想的码率选择为:  $R^0=0.29$ ,  $R^1=0.75$ ,  $R^2=0.96$ ,  $R^3=1$ 。为使 Turbo 码译码简化, 本文在仿真中对码率的选取作了适当简化,  $R^0=0.33$ ,  $R^1=0.75$ ,  $R^2=1$ ,  $R^3=1$ 。只要求前两级用 Turbo 编码, 最后两级直接传输, 在第二级增加一个删除器, 交织大小  $N$  选取为2 000。选用生成矩阵  $G$  为(31, 37)<sub>8</sub> 递归系统码(RSC)构成 Turbo 码, 16QAM 的 Ungerboeck 分集欧氏距离分布为  $\delta_0=0.632$ ,  $\delta_1=\sqrt{2}\delta_0$ ,  $\delta_2=2\delta_0$ ,  $\delta_3=2\sqrt{2}\delta_0$ 。由式(5)可得, 误码率上限中  $Z$  取最大值为  $Z_{(l)}=4\exp(-\delta_l^2/\sigma^2)$ 。

在式(7)中, 误码率与  $Z_{(l)}$  的  $2k$  次方成正比, 因此随着  $\delta$  的增加, 对整个系统误码率的影响将减小, 主要由  $l=0$  和  $l=1$  两项决定。由(31, 37)RSC 码构成 Turbo 码的有效自由距离  $d_{\text{free,eff}}=22$ , 由式(7)得到误码率上限。

从图5可看出, 误码率上限曲线与仿真曲线在形状上较为接近, 且仿真结果在误码率上限之下, 此时的 Shannon 限为4.4 dB, 仿真结果与容量限在  $10^{-5}$  时, 相差仅1 dB, 接近 Shannon 限, 说明 Turbo 多级码调制的有效性, 且该调制方案具有较高的传输效率。

## 5 结论

本文提出了 Turbo 多级码设计方案, 根据信息理论设计了 Turbo 码的码率和交织长度, 使信道容量得到充分应用, 并推导出 Turbo 多级码整个系统的误码率公式。通过对(31, 37)RSC 码构成 Turbo 码在16QAM 下的系统仿真, 取得了较好的实验结果, 说明了本文的设计方案和误码率的计算是可行有效的。

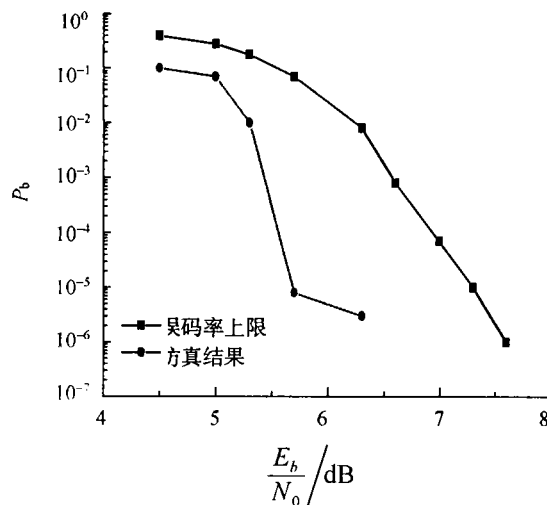


图5 Turbo码多级调制误码率

## 参 考 文 献

- 1 李立志, 李乐民. 截短RS/混合II型ARQ在衰落信道上的性能分析. 电子科技大学学报, 1999, 28(1):1~5
- 2 Wachsmann U, Hubber J. Power and bandwidth efficient digital communication using turbo-codes in multilevel codes. European Trans Telecomm, 1995,16(5): 557~567
- 3 张中培, 靳 蕃. 从相关性分析 Turbo 码交织器设计. 电子科技大学学报, 2000, 29(1): 25~28
- 4 Imai H, Hirakawa S. A new multilevel coding method using error correcting codes. IEEE Trans on Inform Theory, 1977, 23(7): 371~377
- 5 Engdahl K, Sh Zigangirov K. On the calculation of the error probability for a multilevel modulation scheme using QAM-signaling. IEEE Tran on Inform Theory, 1998,44(4): 1 612~1 919
- 6 Benedetto S, Montorsi G. Design of parallel concatenated convolution codes. IEEE Trans on Comm, 1996, 44(5): 591~600

**Turbo-codes Multilevel Modulation and Their Performance**

Zhang Zhongpei     Yang Hong

(Dept. of Applied Physics, Institute of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** In this paper, the recently proposed Turbo-codes are applied to multilevel modulation, then to multistage decoding. Base on the information theory, the method of designing rates and interleaving lengths of Turbo-codes is proposed. Let the lower levels codes have higher correct error capacities, and the higher levels codes have higher transmission capacities, the transmission rate of the system is improved. The performance of Turbo multilevel codes is analyzed, and its formula of error rate is obtained. Simulation results show the validity of the design scheme and the formula.

**Key words** multilevel code; multistage decode; weight distribution; Turbo code

## 告 示

为适应我国信息化建设的需要, 扩大作者学术交流渠道, 本刊已和《中国学术期刊(光盘版)》、“中国期刊网”、“万方数据资源系统(China Info)数字化期刊群”、《北极星》网站等合作。作者著作权使用费与本刊稿酬一次性给付。如作者不同意将文章在各数据库发布, 请在来稿时声明, 本刊将根据作者要求适当处理。

· 本刊编辑部 ·