第29卷 第6期
2000年12月

电子科技大学学报
Journal of UEST of China

Vol.29 No.6
Dec. 2000

可达矩阵的新求法

杨秀文* 严尚安 张 洁
(后勤工程学院基础部 重庆 400016)
曾顺鹏
(重庆石油高等专科学校 重庆 400042)

【摘要】 将模糊数学求传递闭包的思想应用到离散数学中。利用可达矩阵与邻接矩阵的关系，引进模糊矩阵的合成运算，根据可达矩阵的常用求法，推证出新的可达矩阵的计算公式，并提出了逐次平方的算法，该算法简单易行。

关 键 词 可达矩阵；邻接矩阵；布尔矩阵；逐次平方法
中图分类号 O158；O157.5

在《离散数学》的图论部分，用矩阵表示图时涉及到一类重要的矩阵——可达矩阵，它是判别图中任意两点是否有通路的重要手段，也是求强分图的重要方法，但可达矩阵的求法比较复杂[1~3]。本文针对这一问题，通过推导定理，提出了一种简单可行的算法。

1 定 义

定义 1 以二阶布尔代数 $\langle\{0,1\},\wedge,\vee,\neg;0,1\rangle$ 的元素为元素的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=0$、1，则称 $\boldsymbol{A}$ 为布尔矩阵。给定 n 阶布尔矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，规定矩阵的合成运算“∘”和取大运算“⊕”如下：

1) $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(C_{ij}),C_{ij}=\bigvee\limits_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$；

2) $\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}=(a_{ij}\vee b_{ij})$；

3) $\boldsymbol{A}^{(2)}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}=(M_{ij}),M_{ij}=\bigvee\limits_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge a_{kj})$；

4) $\boldsymbol{A}^{(n)}=\boldsymbol{A}^{(n-1)}\circ\boldsymbol{A}$

式中 ∨、∧表示元素的取大、取小运算。

定义 2 在图 $G=\langle V, E\rangle$ 中，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n,n}$

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{之间至少存在一条通路}\\0 & \text{否则}\end{cases}$$

称为可达矩阵。由于顶点到顶点自身是连通的，因此 $p_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$

可达矩阵的常用求法为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{A}^{(2)}\cdots\boldsymbol{A}^{(n-1)}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵；$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为简单图$G=(V,E)$的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}(v_i,v_j)\in E\\0 & \text{否则}\end{cases}$$

因G为简单图，故$a_{ii}=0$。

2000年4月24日收稿
* 女 35岁 硕士

2 定理及证明

引理(分配律) 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$C=(c_{ij})$分别是 n 阶布尔阵，则

$$(A\oplus B)\circ C=(A\circ C)\oplus(B\circ C)$$

证明 假设等式的左边为 $D=(d_{ij})_{n,n}$，等式的右边为 $E=(e_{ij})_{n,n}$，$d_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}((a_{ik}\vee b_{ik})\wedge c_{kj})=\bigvee_{k=1}^{n}((a_{ik}\wedge c_{kj})\vee(b_{ik}\wedge c_{kj}))=[\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge c_{kj})]\vee[\bigvee_{k=1}^{n}(b_{ik}\wedge c_{kj})]=e_{ij}$，有$(A\oplus B)\circ C=(A\circ C)\oplus(B\circ C)$。

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{n,n}$是图 $G=\langle V,E\rangle$ 的邻接矩阵，E 是单位矩阵，则有

$$(E\oplus A)^{(n-1)}=E\oplus A\oplus A^{(2)}\cdots A^{(n-1)}\qquad n>1$$

证明 当 $n=2$时，左边$=E\oplus A=$右边。假设 $n=k$ 时，命题成立，则当 $n=k+1$时，有

左边 $=(E\oplus A)^{(k)}=(E\oplus A)^{(k-1)}\circ(E\oplus A)=[E\oplus A\oplus A^{(2)}\cdots A^{(k-1)}]\circ(E\oplus A)=$
$\{[E\oplus A\oplus A^{(2)}\cdots A^{(k-1)}]\circ E\}\oplus\{[E\oplus A\oplus A^{(2)}\cdots A^{(k-1)}]\circ A\}=$
$[E\oplus A\oplus A^{(2)}\cdots A^{(k-1)}]\oplus[A\oplus A^{(2)}\cdots A^{(k)}]=E\oplus A\oplus A^{(2)}\cdots A^{(k)}=$ 右边

由归纳法可得，原命题成立。由此得到：

定理 2 设 $A=(a_{ij})$是图 G 的邻接矩阵，图 G 的顶点个数为 n，E 是单位矩阵，则图 G 的可达矩阵为

$$P=(E\oplus A)^{(n-1)}$$

定理的几何解释如下：在图 G 的顶点加一个自环，不改变图的可达性。此时图的邻接矩阵为 $E\oplus A$，该矩阵具有自反性(对角线元素全为1)，由模糊数学知识知道，其传递闭包为$(E\oplus A)^{(n-1)}$，又由定理1得$(E\oplus A)^{(n-1)}$，即为 G 的可达矩阵。

定理 3 令 $E\oplus A=B$，则有 $B^{(n-1)}=B^{(n)}$（$n>1$）。

证明 当 $n=2$时，左边$=B^{(1)}=E\oplus A$，右边$=B^{(2)}=E\oplus A\oplus A^{(2)}$；当 $i\neq j$ 时，因 $a_{ij}\vee a_{ij}^{(2)}=a_{ij}\vee[\bigvee_{k=1}^{2}(a_{ik}\wedge a_{kj})]=a_{ij}\vee(a_{ii}\wedge a_{ij})\vee(a_{ij}\wedge a_{jj})=a_{ij}\,(i,\ j=1,\ 2)$(因 $a_{ii}=a_{jj}=0$)，因此 $a_{ij}\vee a_{ij}^{(2)}=a_{ij}$，所以 $E\oplus A=E\oplus A\oplus A^{(2)}$，即 $B^{(1)}=B^{(2)}$。假设 $n=k$ 时命题成立，则当 $n=k+1$时，有

$$\text{左边}=B^{(k)}=B^{(k-1)}\circ B^{(1)}=B^{(k)}\circ B^{(1)}=B^{(k+1)}=\text{右边}$$

由归纳法得，原命题成立。

3 可达矩阵的具体求法

根据定理3有

$$B^{(n+1)}=B^{(n)}\circ B=B^{(n-1)}\circ B=B^{(n)}=B^{(n-1)}$$

因此有

$$P=B^{(n-1)}=B^{(n)}=B^{(n+1)}=\cdots$$

采用逐次平方法，即

$$B\to B^{(2)}\to(B^{(2)})^{(2)}\to((B^{(2)})^{(2)})^{(2)}\cdots\to B^{(2k)}$$

令 $2^k\geqslant n-1$，故有 $k\geqslant\log_2(n-1)$。

因此，至多需求$[\log_2(n-1)]+1$步，便可求得可达矩阵 $P=B^{(n-1)}$。其中$[x]$表示 x 的整数部分。例如 $n=30$，至多只需平方5次便可达到目的。这种求法在原方法的基础上大大进行了简化，使用更方便快捷。

参 考 文 献

1 左孝凌, 李 为, 刘永才. 离散数学. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1982

2 姜泽渠, 罗示丰, 成和平. 离散数学. 重庆: 重庆大学出版社, 1997

3 杨伦标, 高英仪. 模糊数学原理及应用. 广州: 华南理工大学出版社, 1995

New Formula of Reachability Matrix

Yang Xiuwen　Yan Shang'an　Zhang Jie

(Basic Department, Logistics Engineering College　Chongqing　400016)

Zeng Shunpeng

(Chongaqing Petroleum College　Chongqing　400042)

Abstract　The idea of Fuzzy mathematics is applied to discrete mathematics. According to the relationship between reachability matrix and adjacency matrix, a new formula is testified, which is used for calculating reachability matrix. At the same time, the algorithm of successive square is proposed.

Key words　reachability matrix;　adjacency matrix;　Boolean matrix;　the algorithm of successive square

---

·科研成果介绍·

微波器件雷基图自动测绘装置

主研人员：张兆镗　胡义正

微波器件雷基图自动测绘装置由驻波及相位检测器、步进电机及其驱动的微波失配器、定向耦合器、大功率匹配负载、可变衰减器、功率检波器、微波混频器及本地振荡器、与等值线相应的功率门并联电路组及频率门并联电路组、放大器微机系统、绘图仪组成对微波器件进行雷基图自动测绘。该装置在阻抗的自动扫描过程中与等值线相交时采集数据，数据处理简单，实现了雷基图快速测绘(10 min内)，微波器件的生产厂家及使用单位适用。

·科　卞·