p-距离空间中压缩映像序列的不动点定理

杨翰深*　　　钟守铭　　　杨　恒
(西南工学院　四川 绵阳　621002)　(电子科技大学应用数学系　成都　610054)　(西南工学院　四川 绵阳　621002)

【摘要】 引入了p-距离空间的概念，利用泛函分析的理论，对 p-距离空间中的不动点问题进行了研究，给出了 p-距离空间中一类压缩映像序列的公共不动点定理．其距离空间、 2-距离空间和3-距离空间都是 p-距离空间的特殊例子．

关　键　词　p-距离空间； 2-距离空间； 3-距离空间； 不动点； 公共不动点； 压缩映像序列
中图分类号　O177. 91

自 Frechet 系统地应用抽象空间这一思想以来，度量空间(即距离空间，本文称为1-距离空间)即成为泛函分析的基础。Gä hler 引入了2-距离空间的概念[1]，Iseki 研究2-距离空间中映像的不动点定理[2~5]，Rhoades 则把 Ciric 的结论移植到2-距离空间[6]，Khan 等进一步讨论了2-距离空间映像的不动点定理[7,8]。此后，M. Imdad 等国内外一批学者研究了2-距离空间中各种映像不动点问题[6~11]。

本文引入p-距离空间的概念，同时给出了 p-距离空间上一类压缩映像序列的公共不动点定理。显然，距离空间、2-距离空间、3-距离空间都是 p-距离空间的特殊例子。因此，对 p-距离空间的拓朴性质及 p-距离空间的不动点理论的深入研究，不仅可研究各类距离空间的共同性质，而且可以把与其有关的同类问题研究(例如不动点定理)统一在一个模式之下。

1　p-距离空间的定义及预备知识

定义 1　$(X,\text{ñ})$ 称为p-距离空间，如果 X 是一个空间， r 是定义在$\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{p}$上满足以下条件的一非负实值函数：

1) 对于 X 中任意互不相等的p 点$a_i\,(i=1,2,\cdots,p)$，存在一点$u\in X$ 满足 $r\,(a_1,a_2,\cdots,a_p,u)\neq 0$；

2) $r\,(a_1,a_2,\cdots,a_p,a_{p+1})=0$ ，当$a_i\,(i=1,2,\cdots,p+1)$中至少有两点相等；

3) $r\,(a_1,a_2,\cdots,a_p,a_{p+1})=[\,r\,(a_1,a_2,\cdots,a_{p+1})|a_i\leftrightarrow a_j,i\neq j]$；

4) $r\,(a_1,a_2,\cdots,a_p,a_{p+1})\leqslant\sum\limits_{i=1}^{p+1}[\,r(a_1,a_2,\cdots,a_{p+1})|a_i\leftarrow u]$，$\forall u\in X$ 。

其中将4)称为(p 维)单形体积不等式，$[\,r\,(a_1,a_2,\cdots,a_{p+1})|a_i\leftrightarrow a_j,i\neq j]$ 表示用 $r\,(a_1,a_2,\cdots,a_{p+1})$ 中$a_i\,(i=1,2,\cdots,p+1)$的任意点a_j 来交换$a_i\,(i=1,2,\cdots,p+1)$中的任意点a_i所得到的结果，只要$i\neq j\,(i,j=1,2,\cdots,p+1)$。$\sum\limits_{i=1}^{p+1}[\,r\,(a_1,a_2,\cdots,a_{p+1})|a_i\leftarrow u]$，$\forall u\in X$ ，则表示用 X 中任意一点 u 依次去替换$r\,(a_1,a_2,\cdots,a_{p+1})$ 中的每一个$a_i\,(i=1,2,\cdots,p+1)$所得结果的和。

注记　如果 X 只含p 点， r 是平凡的， 假设 X 至少含有$p+1$点。

定义 2　p-距离空间(X,r) 中的一个序列 $\{x_n\}$被称为 Cauchy 列，如果$\lim r\,(x_m,x_n,a_1,\cdots,a_{p-1})=0$，对于 X 中任意的$a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}$ 都成立，则序列$\{x_n\}$ 被称为收敛的，如果存在 $x\in X$ ，使得

2000年6月14日收稿
* 男　53岁　大学　教授

$\lim r(x_n, x, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) = 0$ 对于 X 中任意的 $a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ 都成立，记为 $x_n \to x$。如果 X 中任意一个 Cauchy 列都在 X 中收敛，则 p-距离空间 (X, r) 称为完备的。

定义 3 设 (X, r) 是 p-距离空间，r 是 X 上的连续 p-距离，如果 r 关于4个变量中的3个为序列连续，本文假定 p-距离 r 是连续的。

2 主要结果

定理 设 (X, d) 是一完备的 p-距离空间，$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 的一自映像列，假设存在非负整数列 $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和非负数 a, b, g，使得对一切 $x, y, a_k \in X\ (k = 1,2,\cdots, p-1)$ 和一切自然数 $i \neq j$，满足：

1) $d(T_i^{m_i}x, T_j^{m_j}y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant ad(x, T_i^{m_i}x, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + bd(y, T_j^{m_j}y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + gd(x, y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$，这里 $a + b + g < 1$。又设对于 X 中至少一点 x_0，$\forall a_1, a_2, \cdots, a_{p-1} \in X$，存在常数 K 满足

2) $d_{a,b}(O_T(x_0; 0, \infty)) = K$，这里 $d_{a,b}(A) =: \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$，$O_T(x_0; 0, \infty) = \{x_n = T_i^{\,n}x\}_{n=0}^{\infty}$，$\forall i, i = 1,2,\cdots$，则映像列 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 X 中存在唯一的公共不动点。

证明 令 $S_i = T_i^{m_i}$，$i = 1,2,\cdots$，于是对一切 $x, y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1} \in X$ 和一切自然数 $i \neq j$，由1)有

$$d(S_i x, S_j y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant ad(x, S_i x, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + bd(y, S_j y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + gd(x, y, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \tag{1}$$

对于2)中的 $x_0 \in X$，定义迭代序列 $x_n = S_n x_{n-1}, n = 1,2,\cdots$，于是由式(1)

$$d(x_1, x_2, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) = d(S_1 x_0, S_2 x_1, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant bd(x_1, x_2, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + (a + g)d(x_0, x_1, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1})$$

故有

$$d(x_1, x_2, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant qd(x_0, x_1, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \tag{2}$$

式中 $q = (a + g)/(1 - b) < 1$，因为 $a + b + g < 1$。由式(2)易知，对一切正整数 n，有

$$d(x_n, x_{n+1}, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant q^n d(x_0, x_1, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \qquad \forall a_1, a_2, \cdots, a_{p-1} \in X \tag{3}$$

由 p 维单形体积不等式和式(3)，有

$$d(x_n, x_m, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant d(x_{n+1}, x_m, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + d(x_n, x_{n+1}, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + \cdots + d(x_n, x_m, a_1, a_2, \cdots, a_{p-2}, x_{n+1}) \leqslant K\left(p\sum_{i=n}^{m-1} q^i + q^{m-1}\right) \to 0 \qquad m > n \to \infty$$

故序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，又由 X 的完备性知，存在 $u \in X$ 使得 $x_n \to u$。

证明 u 是映像列 $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 X 中的公共不动点。由 p 维单形体积不等式，有

$$d(u, S_n u, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant d(u, x_{m+1}, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + a(d(x_m, x_{m+1}, u, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + d(x_m, x_{m+1}, u, a_1, a_2, \cdots, a_{p-2}) + \cdots + d(x_m, x_{m+1}, u, a_2, \cdots, a_{p-1})) + bd(u, S_n u, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) + gd(x_m, u, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \qquad \forall a_1, a_2, \cdots, a_{p-1} \in X \tag{4}$$

因 $x_n \to u$，式(4)两边当 $m \to \infty$ 时取极限，可得

$$d(u, S_n u, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant bd(u, S_n u, a_1, a_2, \cdots a_{p-1}) \qquad \forall a_1, a_2, \cdots, a_{p-1} \in X, \forall n \tag{5}$$

由于 $b \in [0,1)$，于是 $d(u, S_n u, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) = 0$，$\forall a_1, a_2, \cdots, a_{p-1} \in X$，$\forall n$。故有 $S_n u = u$，$\forall n$，即 u 是映像列 $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 X 中的公共不动点。再证明映像列 $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 X 中的公共不动点 u 是唯一的。设映像列 $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 X 中还有公共不动点 t，则 $\forall n$，有

$$d(u, t, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) = d(S_n u, S_n t, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \leqslant g\, d(u, t, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \qquad \forall a_1, a_2, \cdots, a_{p-1} \in X \tag{6}$$

因$g \in [0,1)$,于是$d(u,t,a_1,a_2,\cdots,a_{p-1})=0$， $\forall a_1,a_2,\cdots,a_{p-1} \in X$， 故有$t=u$， 即 u 是映像列$\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$在X中的唯一公共不动点。另外，因为$u=S_n u=T_n^{m_n}u$， $\forall n=1,2,\cdots$， 所以$T_n u=T_n(T_n^{m_n}u)=T_n^{m_n}(T_n u)=S_n(T_n u)$，即$T_n u$是$\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$在$X$中的公共不动点，$\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$在$X$中的公共不动点是唯一的，故只能有 $T_n u=u$， $\forall n,n=1,2,\cdots$， 表明 u 是映像列$\{T_n\}$在 X 中的公共不动点。又证明映像列$\{T_n\}$在X中的公共不动点u是唯一的。设映像列$\{T_n\}$在X中还有一个公共不动点t， 则$\forall n$， 有

$$d(u,t,a_1,a_2,\cdots,a_{p-1})=d(T_n u,T_n t,a_1,a_2,\cdots,a_{p-1})\leqslant g d(u,t,a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}) \qquad \forall a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}\in X$$

因$g \in [0,1)$， 于是$\forall a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}\in X$， 故有$t=u$， 即$u$是映像列$\{T_n\}$在$X$中的唯一公共不动点。

在上述主要结果中取 P=1、2或3时，能得到在距离空间、2-距离空间和3-距离空间中相应的公共不动点定理，也可以得到文献[3]中的结果。

参 考 文 献

1 Gä hler S. 2-metrische Raume und ihre topologische Struktur. Math Nachr, 1963(26): 115~148

2 White A G. 2-Banach spaces. Math Nachr, 1969,42: 43~60

3 Iseki K, Sharma P L, Sharma B K. Contraction type mapping on 2-metric space. Math Japonicae, 1976,21: 67~70

4 Iseki K. Fixed point in 2-metric space. Kobe Math Sem Notes, 1979: 133~136

5 K Iseki. Mathematics in 2-normed spaces. Math Seminar Notes. 1976, 4:161~174

6 Rhoades B E. Contraction type mappings on 2-metric spaces. Math Nachr, 1979, (91)4: 151~154

7 Naidu S V R, Prasad J R. Fixed point theorem in metric, 2-metric and normed linear spaces. India J Pure Appl Math, 1986, 17(5): 602~612

8 M Imdad, Khan M S, Khan M D. A common fixed point theorem in 2-metric spaces. Math Japonica 36, 1991(5): 907~914

9 Beg I, Minhas T Y. A convexity in 2-metric spaces and nonexpansive mappings. Math Japonica 36, 1991,(1) 105~112

10 刘明学. 关于不变子空间问题的否定解. 电子科技大学学报, 1998, 27(6): 667~670

11 杨长诚. 中紧性及其推广. 成都电讯工程学院学报, 1988, 17(增): 209~212

A Fixed Point Theorem for Contraction-mapping Series on *p*-Metric Space

Yang Hansheng

(Dept of Math.,Southwest Institute of Technology 621002)

Zhong Shouming

(Dept of Applied Math., UEST of China Chengdu 610054)

Yang Heng

(Dept of Math.,Southwest Institute of Technology 621002)

Abstract In this paper, the concept of p-metric space is introduced. According to the theory of functional analysis, the fixed point problems on p-metric space are studied. A common fixed-point theorem for a series of contraction mappings on p-metric space is also given, in which the metric space 2-metric space and 3-metric space are the special cases of p-metric space.

Key words p-metric space; 2-metric space; 3-metric space; fixed point; series of contraction mappings; common fixed point