

一类复子波的时-频局域化特征分析*

陶德元** 袁晓 何小海

(四川大学电子信息学院 成都 610064)

【摘要】介绍了一类新的复基子波——Y-母波，引进时间算子和频率算子分析了Y-母波的时间、频率和时-频局域化特征。理论和数值分析结果表明：Y-母波具有良好的时-频局域化特征；选择适当的参变量，可以构造出逼近“最优”时-频局域化特征窗函数的复母波。

关键词 复子波；时间算子；时宽；带宽；局域化特征

中图分类号 TN911.72；O177.6

目前，子波研究主要集中在实值子波方面，而复子波在信号分析和处理等领域具有许多潜在优势，有广泛的应用前景^[1~8]。子波构造是子波理论中的一个核心问题，从不同的角度和方法出发，既能构造出不同性能的母波(基子波)，也能得到相同的母波。随着基本理论的日益完善和应用的广泛深入，具有良好综合性能指标的子波系统设计和“面向对象”的自适应子波方法成为当前子波研究的热点，人们力图寻找构造子波的统一方法和通用的评价标准来衡量各种母波函数的性能。子波构造包含两方面含义：如何构造新母波和研究新母波的基本性质；基于 Bubble 子波和超高斯谱子波的构造方法^[9]。文献[7,8]提出了一类品质因素可控的新的复基子波——Y-母波，记为 $y_Y(t)$ 。Y-母波在频域和时域均具有显式的解析表达，且某些经典母波可归纳于Y-母波类中，或用Y-母波类中某一特定元素逼近。在信号处理和分析中，Y-母波也具有良好表现。本文引入时间算子和频率算子来研究Y-母波的时间、频率和时-频局域化特征。

1 Y-母波

Y-母波在频域具有简明的解析表达式^[7,8]

$$\hat{y}_Y(\omega) = \begin{cases} C^{-1} \omega^k \exp\left(-\frac{|\omega|^m}{s}\right) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \quad 0 < s, k, m < \infty \quad (1)$$

式中 C 表示能量归一化因子， $C = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \left[\int_0^\infty |\omega^k \exp\left(-\frac{|\omega|^m}{s}\right)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2m\delta}} \left(\frac{s}{2^{\frac{1}{m}}}\right)^{k+\frac{1}{2}} \left[G\left(\frac{2k+1}{m}\right) \right]^{\frac{1}{2}}$

($G(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt, x > 0$ 是 gamma 函数)， k, s 和 m 是控制参变量。

在时域也能求出 Y-母波的解析表达式，由 $\exp(i\omega t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(i\omega)^n}{n!}$ ，有

$$\begin{aligned} \hat{y}_Y(t) &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}_Y(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{s^{k+1}}{2m\delta C} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} G\left(\frac{2n+k+1}{m}\right) (st)^{2n} + \right. \\ &\quad \left. i \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} G\left(\frac{2n+k+2}{m}\right) (st)^{2n+1} \right] = y_{Y_r}(t) + i y_{Y_i}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

2000年1月13日收稿

* 国家自然科学基金资助项目，基金号：69872024

** 男 58岁 大学 教授

可见 Y-母波是复解析母波, 其实部 $y_{Yr}(t)$ 和虚部 $y_{Yi}(t)$ 互为 Hilbert 变换, 且 $y_{Yr}(t)$ 和 $y_{Yi}(t)$ 满足允许条件。

2 时间算子和频率算子

为了在时域计算频率函数且在频域计算时间函数, 引入频率算子 W 和时间算子 T ^[10]

$$W = -i \frac{d}{dt} \quad T = i \frac{d}{d\omega} \quad (3)$$

W 和 T 可以重复使用, 用符号 W^n 和 T^n 表示, 即

$$W^n s(t) = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n} s(t) \quad T^n S(\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} S(\omega) \quad (4)$$

这两个算子均为厄密(Hermitian)算子, 即对于任何两个信号 $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$ 和 $s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$, 有

$$\begin{cases} \int_R s_1^*(t) W s_2(t) dt = \int_R s_2(t) \{W s_1(t)\}^* dt \\ \int_R S_1^*(\omega) T S_2(\omega) d\omega = \int_R S_2(\omega) \{T S_1(\omega)\}^* d\omega \end{cases} \quad (5)$$

定理 1 设 $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$, 则对任意一实函数 $g \in L^1(R)$, 有^[9]

$$\begin{aligned} \langle g(\omega) \rangle &= \int_R g(\omega) |S(\omega)|^2 d\omega = \int_R s^*(t) g(W) s(t) dt \\ \langle g(t) \rangle &= \int_R g(t) |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_R S^*(\omega) g(T) S(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

使用时间算子 T 和频率算子 W 可以极大地简化计算, 而且对研究和理解时-频局域化有重要意义。

3 Y-母波的局域化特征分析

为了反映一个非平凡窗函数 $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ 的局域化特征, 需要研究 $|g(t)|^2$ 和 $|G(\omega)|^2$, 通常用其标准偏差来表征 g 的时-频局域化特征^[1,2]。

定义 1 函数 $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ 的时宽 T 和带宽 B 分别定义为

$$\begin{cases} T = D_t = \left[\int_R (t - \langle t \rangle)^2 |g(t)|^2 dt / \|g(t)\|_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ B = D_\omega = \left[\int_R (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |G(\omega)|^2 d\omega / \|G(\omega)\|_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (7)$$

也可将其定义为 $T = 2D_t$, $B = 2D_\omega$ ^[1,2]。

对于 Y-母波, 其功率谱密度的 n 阶矩为

$$\begin{aligned} \langle \omega^n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega^n |\hat{y}_Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi C^2} \int_0^\infty \omega^{n+2k} \exp\left(-2 \left| \frac{\omega}{s} \right|^m\right) d\omega = \\ & \left(\frac{s}{2^{\frac{1}{m}}} \right)^n G\left(\frac{2k+1+n}{m}\right) / G\left(\frac{2k+1}{m}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

因此可得 Y-母波的频率局域化特征, 即带宽 B_Y 为

$$\begin{aligned} B_Y &= (\langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{s}{2^{\frac{1}{m}}} \left[G\left(\frac{2k+3}{m}\right) G\left(\frac{2k+1}{m}\right) - \right. \\ & \left. G^2\left(\frac{2k+2}{m}\right) \right]^{\frac{1}{2}} / G\left(\frac{2k+1}{m}\right) = B_Y(s, k, m) \end{aligned} \quad (9)$$

直接将 $y_Y(t)$ 代入式(7)计算 Y-母波的时宽 T_Y 十分复杂, 因为 $y_Y(t)$ 是一个无穷级数之和, 不可能得到简明的表达式。如果利用时间算子 T , 在频域由 $\hat{y}_Y(\omega)$ 能很容易求出 T_Y 的显式表达式。

利用时间算子 T 的厄密性质和定理 1, Y-母波时域能量密度的 1 阶和 2 阶矩分别为

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t |y_Y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}_Y^*(\omega) T \hat{y}_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{4\delta} \hat{y}_Y^2(\omega) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{4\delta} [\hat{y}_Y^2(\infty) - \hat{y}_Y^2(-\infty)] = 0$$

$$\langle t^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |y_Y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}_Y^*(\omega) T^2 \hat{y}_Y(\omega) d\omega =$$

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{d\omega} \hat{y}_Y(\omega) \right|^2 d\omega = \left(\frac{2^{\frac{1}{m}}}{s} \right)^2 \frac{2km - m + 1}{4} G\left(\frac{2k-1}{m}\right) / G\left(\frac{2k+1}{m}\right)$$

而 $\|y_Y(t)\|_2^2 = 1$, 则 Y-母波的时间局域化特征 T_Y 为

$$T_Y = \sqrt{\langle t^2 \rangle} = \frac{2^{\frac{1}{m}}}{2s} \left[(2km - m + 1) G\left(\frac{2k-1}{m}\right) / G\left(\frac{2k+1}{m}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

可见 $B_Y \propto s$, $T_Y \propto \frac{1}{s}$ 。当 $s = \delta$ 时, $T_Y(k, m)$ 曲面和 $B_Y(k, m)$ 曲面的等值线如图 1 所示。从图中可看出, 当变量 s 固定时, 随着 k 和 m 的增大, Y-母波的频率局域化特征越来越好, 其时间局域化特征越来越差。

定理 2 对于(实和复)Y-母波必须满足条件: $k > \frac{1}{2}$ 。

这是式(10)成立的必要条件, 因为 $G(x)$ 的自变量必须满足 $x > 0$ 。当 $k \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, $T_Y \rightarrow \infty$ 。

给定一窗函数 $g(t)$, 其时宽 T 和带宽 B 在时-频相空间确定了一个分析单元, 该分析单元面积的大小反映了该窗函数的时-频局域化特征: $m = BT$ 。

由式(9)和式(10)可得如下定理:

定理 3 Y-母波的时-频局域化特征 $m_Y = B_Y T_Y = m_Y(k, m)$ 与参变量 s 无关, 完全由参变量 k 和 m 确定, 且有

$$m_Y(k, m) = \frac{1}{2} (2km - m + 1)^{\frac{1}{2}} \left[G\left(\frac{2k+3}{m}\right) G\left(\frac{2k+1}{m}\right) - G^2\left(\frac{2k+2}{m}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \times G^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2k-1}{m}\right) / G^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2k+1}{m}\right) > \frac{1}{2} \quad k > \frac{1}{2} \quad m > 0 \quad (11)$$

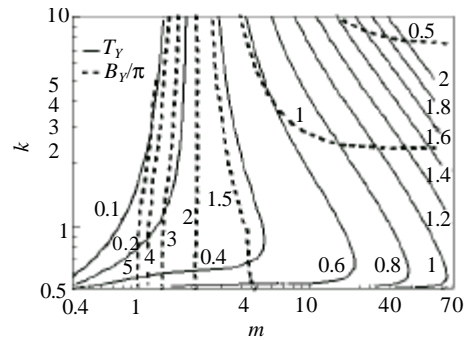
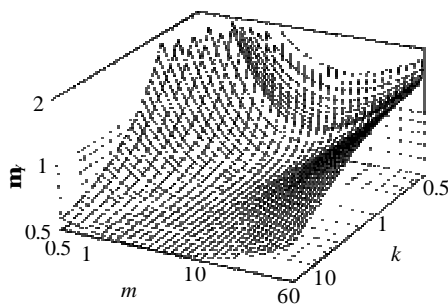
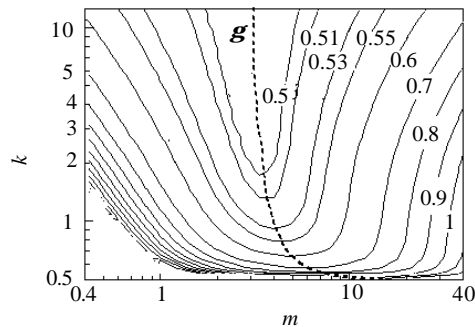


图 1 T_Y 和 B_Y 在平面 (k, m) 上的等值线: $s = \pi$



(a) $m_Y(k, m)$ 曲面图



(b) $m_Y(k, m)$ 等值线与 $g: k=g(m)$ 曲线图

图 2 Y-母波的时-频局域化特征分析

Y-母波的时-频局域化特征 $m_y(k, m)$ 曲面如图2a所示。从图中可以看出, 当 $1 < m < 10$ 时, 随着 k 的增大, m_y 是速降的, 且在 $m_y(k, m)$ 曲面上存在一极小值曲线 $m_{y \min}(k, m)$ 。其数值分析结果为

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \frac{1}{2}} m_y(k, m) = \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} m_y(k, m) = \frac{1}{2} \\ \lim_{m \rightarrow 0} m_y(k, m) = \infty \\ \lim_{m \rightarrow \infty} m_y(k, m) = \infty \end{cases} \quad (12)$$

表明当 k 较大时, Y-母波迅速逼近“最优”时-频局域化(即 $m = \frac{1}{2}$)窗函数——高斯窗函数。当固定 k 和 m 时, $B_y T_y = c$ 为常数, 因此调整参变量 s 可以平衡 Y-母波的时间局域化和频率局域化特征。

$m_y(k, m)$ 的等值线和 $m_{y \min}(k, m)$ 在平面 (k, m) 上的投影 $g: k = g(m)$ 曲线如图2b所示。由图可知, (实值和复值)Bubble 母波和 Mexican 帽母波($k=m=2$)的 $m < 0.53$, $w_0 = \delta$ 时的 Morlet 母波($k \approx 3.0, m \approx 3.0$)已经十分接近“最优”时-频局域化窗函数: $m < 0.505$ 。

4 结束语

本文对一类新的复基子波——Y-母波(类)的时间、频率和时-频局域化特征进行了全面分析。理论研究和数值结果表明, Y-母波具有良好的时-频局域化特征。随着参变量 $k \left(> \frac{1}{2} \right)$ 的增大, Y-母波迅速逼近“最优”时-频局域化窗函数; 调整参变量 s 可以平衡 Y-母波的时间局域化和频率局域化特征, 而其时-频局域化特征 m_y 与 s 无关, 完全由 k 和 m 确定。该结果为在实际应用中选择合适的 Y-母波提供了可靠的理论依据。

Y-母波是一类新的复基子波, 本文仅对其局域化特征进行了研究, 在实际应用中还有许多问题值得进一步深入探讨。如 Y-母波表征信号奇异特征的能力; Y-母波的稳定性和正交条件^[12]; 截断误差与快速算法等, 都应进行综合权衡。

参 考 文 献

- 1 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992
- 2 崔锦泰. 小波分析导论. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1995
- 3 Zhang X P, Desai M D, Peng Y N. Orthogonal complex filter banks and wavelets: some properties and design. IEEE Trans SP, 1999, 47(4): 1 039~1 048
- 4 Lawton W. Applications of complex valued wavelet transforms to subband decomposition. IEEE Trans SP, 1993, 41(12): 3 566~3 568
- 5 Belzer B, Lina J M, Villasenor J. Complex, linear-phase filters for efficient image coding. IEEE Trans SP, 1995, 43(10): 2 425~2 427
- 6 袁 晓, 虞厥邦. 复解析子波变换与语音信号包络提取和分析. 电子学报, 1999 27(5):142~144
- 7 袁 晓. 子波算法、构造、解析子波变换及其在信号处理中的应用: [学位论文]. 成都: 电子科技大学, 1998
- 8 袁 晓. 一类新的复解析子波构造及其性质研究. 电子学报, 2000, 28(4): 123~126
- 9 袁 晓, 虞厥邦. Bubble 小波的正交条件研究. 电子科技大学学报, 1998, 27(1): 25~28
- 10 科恩 L. 时-频分析: 理论和应用. 白居宪译. 西安: 西安交通大学出版社, 1998
- 11 唐向宏, 龚 宇, 龚耀寰. 信号的多通道分辨分解. 电子科技大学学报, 1997, 26(1): 29~33

12 袁 晓, 陶德元, 何小海. 一类新子波的稳定性和正交条件研究. 电子学报, 2000, 28(10): 56~59

Time-frequency Localization Characteristics of A Novel Class of Complex Wavelet

Tao Deyuan Yuan Xiao He Xiaohai

(College of Electronic Information, Sichuan University Chengdu 610064)

Abstract In this paper, a novel class of complex wavelet is introduced. Time, frequency and time-frequency localization characteristics are investigated using time operator. Theoretical and numerical analysis shows that the new class of wavelet possesses excellent time-frequency localization. Many complex wavelets are constructed, which are approximate to the optimal time-frequency window function by changing two controlling parameters of the new wavelet.

Key words complex wavelet; time operator; time width; band width; localization characteristics

(上接第4页)

An Approach for Direction of Arrival Estimation of Distributed Sources Induced by Local Scattering

Wan Qun Yang Wanlin

(College of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract By using 1-dimensional DOA searching rather than resort to multidimensional parametric searching, an algorithm for DOA estimation is given based on first order approximation of distributed sources induced by local scattering. It is applicable in circumstance where distributed function form of sources is unknown or sources with different distributed function forms coexist. Numerical examples illuminate that the performance of DOA estimation is improved compared with that of conventional MUSIC method.

Key words space signal; local scattering; distributed source; first order approximation; direction of arrival estimation