第 30 卷 第 1 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.30 No.1
2001 年 2 月　　Journal of UEST of China　　Feb. 2001

椭圆锥带线的严格解*

阮成礼**

(电子科技大学应用物理所　成都　610054)

【摘要】 研究了椭圆锥带线的特性阻抗等基本参数．假设中心导体带是无限薄理想导体，传输的是 TEM 模，通过坐标变换和共形映射，把椭圆锥带线变为有限宽平行板带线．应用椭圆积分变换得到了椭圆锥带线参数的严格解．该方法可用于圆柱、椭圆柱、圆锥和椭圆锥问题的求解．

关　键　词　椭圆锥带线；　坐标变换；　共形映射；　特性阻抗；　严格解

中图分类号　TN015；　O441.1

共形天线和共形传输线是当前研究的热点[1~4]。文献[4]给出了椭圆锥带线微带线特性阻抗的近似解，其原因是没有考虑坐标变换后带线接地板宽度问题，而是作为无限宽接地板处理。这一近似解只有当导体带张角$2j<<2\pi$时是正确的。事实上，考虑到场解是方位坐标j的周期函数，通过文中式(8)和式(9)的坐标变换后得到一个周期性结构。用$j=\pm\pi$或$b=\pm L/2$的磁壁把周期结构的带线分离成单一的带线，然后用椭圆积分变换研究约束在矩形区域内的电磁问题[5, 6]，可得到严格的闭合解。本文的方法可用于求解圆柱、椭圆柱、圆锥和椭圆锥 TEM 传输线问题。

1　椭圆锥坐标系的变换

如图1所示，椭圆锥带线由“共焦”的椭圆锥内导体、外导体和椭圆弧导体带组成，它们都是由理想导体制成。椭圆弧导体带的厚度为无限薄，椭圆弧导体带把填充介质分为两层，介电常数分别为e_1和e_2，内导体、导体薄带和外导体的椭圆锥角分别是q_1、q_2和q_3，导体带横剖面对 z 轴的张角为$2j$，内、外导体和导体带在r方向均是无限长的。在以下的讨论中采用球锥坐标系[4]。

在$y=0$的坐标平面上$\sin j=j=0$，有

$$\begin{cases} x = r\sin q \\ y = 0 \\ z = r\cos q \end{cases} \tag{1}$$

在$x=0$的坐标平面上，$j=\pi/2$，$\sin j=1$，有

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = r'\sqrt{1-k^2\cos^2 q} \\ z = kr'\cos q \end{cases} \tag{2}$$

在 $z=$常数的平面上，由式(1)、(2)得 $r=kr'$，相应的半短轴和半长轴分别为 $kr'\sin q$和$r'\sqrt{1-k^2\cos^2 q}$。于是$z=$常数的平面与$q=$常数的椭圆锥面相交得

$$\left(\frac{x}{kr\sin q}\right)^2 + \left(\frac{y}{r\sqrt{1-k^2\cos^2 q}}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

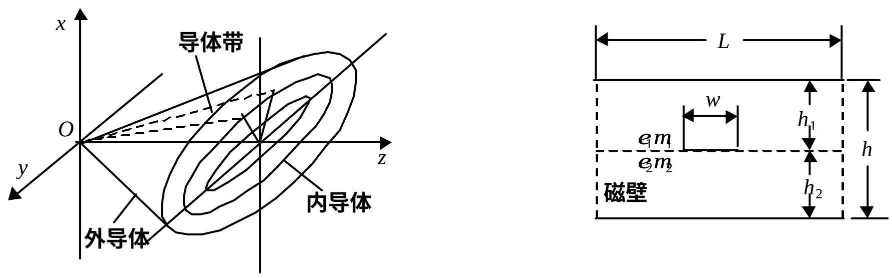
式(3)为是椭圆方程。若焦点联线张角为$2d$，则

2000年4月10日收稿
* 四川省科学基金资助项目，编号：JS02092
** 男　56岁　博士　教授　博士导师

$$\mathrm{tg}d = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{z} = \frac{k'}{k\cos q} \tag{4}$$

$$k = (1 + \mathrm{tg}^2 d\cos^2 q)^{-1/2} \tag{5}$$

对于椭圆锥带线，内导体、导体带和外导体在不同的椭圆锥面上，但有相同的k值，称为“共焦”。



(a) 椭圆锥带线 (b) ab 平面上的平行板带线

图1 椭圆锥带线及其变换

设椭圆锥带线中传播的 TEM **波，其形式解为**

$$F(r,q,j) = r^{-1} E(q, j)\exp(\pm k_0 r) \tag{6}$$

式中 $k_0 = w\sqrt{me} = 2ð / l$ **是波数。把式**(6)**代入球锥坐标系中的** Helmholtz **方程得**

$$\sqrt{1-k^2\cos^2 q}\,\frac{\partial}{\partial q}\left(\sqrt{1-k^2\cos^2 q}\,\frac{\partial E}{\partial q}\right) + \sqrt{1-k'^2\sin^2 j}\,\frac{\partial}{\partial j}\left(\sqrt{1-k^2\sin^2 j}\,\frac{\partial E}{\partial j}\right) = 0 \tag{7}$$

作变换

$$a = \int_0^q \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} = K(k) - F\left(\frac{ð}{2} - q, k\right) \tag{8}$$

$$b = \int_0^j \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 x}} = F(j, k') \tag{9}$$

式(7)**变为**

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 0 \tag{10}$$

2 共形映射 [2,3] 树 HTTP 图3 空间积分辐射谱 t

式(10)**是ab平面上的二维拉氏方程，即式**(8)、(9)**把椭圆锥带线变成了平行板带线，如图**1**所示。考虑到q 和j 的取值范围，可以得到ab平面上带线的尺寸。**

两接地板间距为

$$h = F\left(\frac{ð}{2} - q_1, k\right) - F\left(\frac{ð}{2} - q_3, k\right) \tag{11}$$

带线与下接地板间距为

$$h_1 = F\left(\frac{ð}{2} - q_1, k\right) - F\left(\frac{ð}{2} - q_2, k\right) \tag{12}$$

接地板宽度为

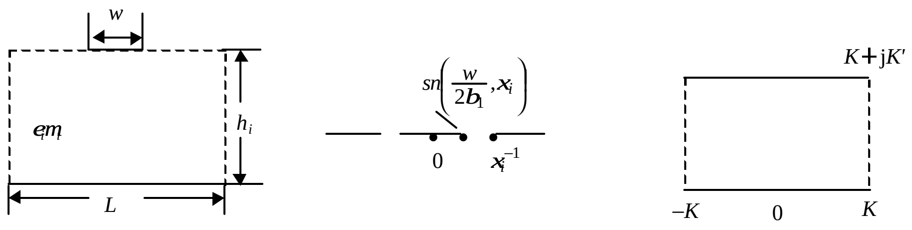
$$l = 4K(k') \tag{13}$$

导体带宽度为

$$w = 2F(j, k') \tag{14}$$

由图1可见，整个电磁场被约束在宽为 l，高为 h 的矩形区域内。这种接地板宽度为有限值的平行板带线的单位长度电容 C 可表示为上下两部分电容之和，C=C_1+C_2。C_1是导体带与上接地板之间的单位长度线电容，C_2是导体带与下接地板之间的单位长度线电容。因两部分结构相同，可用同一方法求出，如图2所示。做变换可得

$$\begin{cases} z = B_i sn^{-1}(l, x_i) \\ B_i = l/2K(x_i) \end{cases} \qquad i=1,2 \tag{15}$$



(a)　有限尺寸介质基片上的微带线　　(b)　半空间中的共面波导　　(c)　无边缘效应的平行板电容

图2　电磁场约束在矩形区域内的共形映射

即把 z 平面上的微带形结构映射到 t 平面上的共面波导(CPW)结构，利用 CPW 的公式可得

$$C_i = 2e_0 e_i \frac{K(k_i)}{K(k_i')} \qquad i = 1,2 \tag{16}$$

$$k_i = x_i sn\left(\frac{w}{2B_i}, x_i\right) \tag{17}$$

$$x_i = \frac{(e^{\eth l/2h_i} - 2)^2}{(e^{\eth l/2h_i} + 2)^2} \qquad \frac{1}{2} \leqslant x_i^2 \leqslant 1 \tag{18}$$

$$x_i' = \frac{(e^{2\eth h_i/l} - 2)^2}{(e^{2\eth h_i/l} + 2)^2} \qquad 0 \leqslant x_i^2 \leqslant \frac{1}{2} \tag{19}$$

式中　$k_i^2 + k_i'^2 = 1$，$x_i^2 + x_i'^2 = 1$。于是椭圆锥带线的单位长度电容 C，有效介电常数e_e和特性阻抗 Z 分别为

$$C = 2e_0 e_e C_0 \tag{20}$$

$$e_e = \frac{N}{D} \tag{21}$$

$$Z = \frac{60\eth}{D\sqrt{e_e}} \tag{22}$$

其中

$$\begin{cases} N = e_1 \dfrac{K(k_1)}{K(k_1')} + e_2 \dfrac{K(k_2)}{K(k_2')} \\ D = \dfrac{K(k_1)}{K(k_1')} + \dfrac{K(k_2)}{K(k_2')} \end{cases} \tag{23}$$

3　结　论

式(14)为椭圆锥带线位于以 x 轴为对称的位置时导体带宽度的公式。当导体带是任意放置在椭圆锥面上时，则导体带宽度 w 为

$$w = F(j_2, k') - F(j_1, k') \tag{24}$$

可得到一个非对称带线。这时仍可按照前面的分析方法处理，先把带线分为上下两部分，应用椭圆积分变换把矩形区域变为半平面上的非对称共面波导来求解。本文方法可用于解圆柱、椭圆柱、圆锥和椭圆锥 TEM 传输线一类问题。

参 考 文 献

1 Li Zeng, Wang Y. Accurate solutions of elliptic and cylindrical stripline and microstrip lines. IEEE Trans MTT, 1986, 34(2): 259~265

2．Josh K K, Das B N. Analysis of elliptic and cylindrical striplines using Laplace’ s equatious. IEEE Trans MTT, 1980, 28(4): 381~386

3 Tsai R B, Wong K L. Characterization of cylindrical microstrip lines mounted inside a ground cylindrical surface. IEEE Trans MTT, 1995, 43(7): 1 607~1 610

4 Yuan N, Ruan Chengli, Li Weigan. The characteristic impedance of the stripline and microstrip line of the elliptic cone. Microwave and Optical Techmology Letters, 1992, 5(10): 506~509

5 阮成礼. 有限尺寸介质基片上的共面带线. 电子科技大学学报, 1999, 28(4): 366~370

6 阮成礼, 梁淮宁. 旋转目标 RCS 的二维成像. 电子科技大学学报, 2000, 29(6): 604~608

Exact Solution of Elliptic Cone Stripline

Ruan Chengli

(Institute of Applied Physics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract The exact solution of the elliptic cone stripline is derived based on the TEM mode and perfect conductor assumptions. Using the coordinate transform and conformal mapping technique, the ellipilic cone stripline is transformed to a parallel plate stripline. The basic parameters including the characteristic impedance, effective dielectric constant and capacidance per unit length are obtained using elliptic integral transform. The method used in this paper is useful for the problems of circular, elliptic cylinders and circular, elliptic cones.

Key words elliptic cone stripline； coordinate system transform； conformal mapping;； characteristic impedance；exact solution