

二重八面体变几何桁架机器人工作空间解析

范守文* 徐礼钜 甘 泉

(电子科技大学电子机械系 成都 610054) (四川大学制造科学与工程学院 成都 610065)

【摘要】提出了二重八面体变几何桁架机器人工作空间的边界曲面分析方法。该方法以曲面分析及位置正解的解析方法为基础，得到了工作空间边界曲面解析的曲面方程，描绘出了工作空间边界曲面的精确图形。分析计算结果表明，二重八面体变几何桁架机器人的工作空间是由6张曲面片包围而成的闭包。

关键词 变几何桁架； 机器人； 工作空间； 解析法； 曲面方程

中图分类号 TP242

变几何桁架机器人是由静定桁架中某些构件的长度可伸缩变化来实现桁架机构的运动，由一系列变几何桁架机构基本单元如四面体、八面体、十面体和十二面体组成，是多自由度多环路的新颖机构。变几何桁架机构中每个构件都是二力杆，仅受拉力或压力，不能传递扭矩和弯矩，具有刚度大、承载能力高、灵巧性好等特点，并且可设计成可折叠机构。变几何桁架机器人克服了串联机器人刚度差的缺点，在工业自动化和宇航空间等领域具有广阔的应用前景。

机器人的工作空间是衡量机器人性能的重要指标。机器人工作空间分析的方法有数值方法和解析方法。其中，解析方法更精确更有效。并联机器人、变几何桁架机器人工作空间的解析求解是一个非常复杂的问题，在很大程度上依赖于机构位置正解的研究成果，对于比较简单的机构，如平面并联机器人其工作空间的边界可以解析表达^[1]，而对于空间并联机器人、变几何桁架机器人，目前只有数值解法^[2,3]。本文运用解析方法分析了二重八面体变几何桁架机器人的工作空间。

1 二重八面体变几何桁架机器人位置正解的解析方法

图1为二重八面体变几何桁架机构简图， A_1 、 A_2 、 A_3 构成固定平台， B_1 、 B_2 、 B_3 构成中间平台， C_1 、 C_2 、 C_3 构成活动平台，图中各定长杆的长度都为 L 。图2为与其运动等效的3-RSSR机构简图，设 O_1B_1 、 O_2B_2 、 O_3B_3 与各坐标轴 X_i ($i=1,2,3$)的夹角以 q_1 、 q_2 、 q_3 表示，则中间平台铰链点

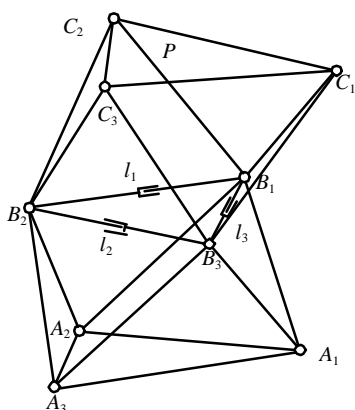


图1 二重八面体变几何桁架机器人机构简图

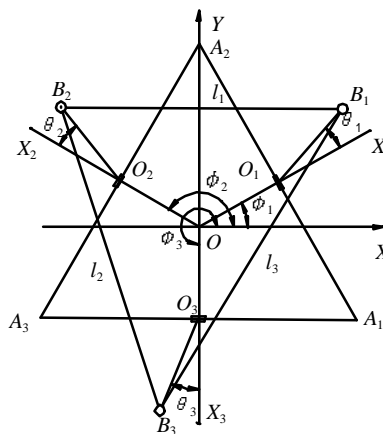


图2 运动等效的3-RSSR机构简图

2000年9月8日收稿

* 男 32岁 博士生 副教授

$B_i(i=1,2,3)$ 在 $O-XYZ$ 坐标系中的坐标可表示为

$$\begin{cases} B_{ix} = (\frac{\sqrt{3}L}{6} + \frac{\sqrt{3}L}{2} \cos q_i) \cos f_i \\ B_{iy} = (\frac{\sqrt{3}L}{6} + \frac{\sqrt{3}L}{2} \cos q_i) \sin f_i \\ B_{iz} = \frac{\sqrt{3}L}{2} \sin q_i \end{cases} \quad (1)$$

B_1B_2 、 B_2B_3 、 B_3B_1 为机构的输入长度，分别表示为 l_1 、 l_2 、 l_3 ，可用 B_1 、 B_2 、 B_3 的坐标表示，机构的约束方程即为

$$\begin{cases} (B_{1x} - B_{2x})^2 + (B_{1y} - B_{2y})^2 + (B_{1z} - B_{2z})^2 = l_1^2 \\ (B_{2x} - B_{3x})^2 + (B_{2y} - B_{3y})^2 + (B_{2z} - B_{3z})^2 = l_2^2 \\ (B_{1x} - B_{3x})^2 + (B_{1y} - B_{3y})^2 + (B_{1z} - B_{3z})^2 = l_3^2 \end{cases} \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)中并整理得到3个以 q_i 表示的超越方程为

$$\begin{cases} A_1 \cos q_1 + B_1 \cos q_2 + C_1 \cos q_1 \cos q_2 + D_1 \sin q_1 \sin q_2 + E_1 = 0 \\ A_2 \cos q_2 + B_2 \cos q_3 + C_2 \cos q_2 \cos q_3 + D_2 \sin q_2 \sin q_3 + E_2 = 0 \\ A_3 \cos q_3 + B_3 \cos q_1 + C_3 \cos q_1 \cos q_3 + D_3 \sin q_1 \sin q_3 + E_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 、 E_i 均为机构的已知几何参数及输入变量的函数。

令 $X_i = \tan(q_i/2)$ ，将三角恒等式 $\sin q_i = 2X_i/(1+X_i^2)$ ， $\cos q_i = (1-X_i^2)/(1+X_i^2)$ 代入式(3)中整理可得

$$\begin{cases} a_1 X_2^2 + b_1 X_2 + c_1 = 0 \\ a_2 X_3^2 + b_2 X_3 + c_2 = 0 \\ a_3 X_3^2 + b_3 X_3 + c_3 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中 各系数 a_i 、 b_i 、 c_i 本身也含有 X_i 。这样将以 q_i 为未知量的超越方程组变成了以 X_i 为未知量的代数方程组。由结式消元法^[4]，可以解出 $X_i(i=1,2,3)$ 。当 $X_i(i=1,2,3)$ 求出后，即 $q_i(i=1,2,3)$ 求得后，中间平台的各铰链点的坐标 $B_i(i=1,2,3)$ 可由式(1)得到。

活动平台中心点 P 与固定平台中心 O 连线所确定的单位向量可由下式确定

$$e = (B_2 - B_1) \times (B_3 - B_1) / |(B_2 - B_1) \times (B_3 - B_1)| \quad (5)$$

由 B_1 、 B_2 、 B_3 所确定的中间平台的平面方程可为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & B_{1x} & B_{1y} & B_{1z} \\ 1 & B_{2x} & B_{2y} & B_{2z} \\ 1 & B_{3x} & B_{3y} & B_{3z} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

式(6)可改写为如下形式

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$$

式中

$$\begin{cases} A = -B_{2y}B_{3z} - B_{3y}B_{1z} - B_{1y}B_{2z} + B_{2y}B_{1z} + B_{1y}B_{3z} + B_{3y}B_{2z} \\ B = B_{2x}B_{3z} + B_{3x}B_{1z} + B_{1x}B_{2z} - B_{2x}B_{1z} - B_{1x}B_{3z} - B_{3x}B_{2z} \\ C = -B_{2x}B_{3y} - B_{3x}B_{1y} - B_{1x}B_{2y} + B_{2x}B_{1y} + B_{1x}B_{3y} + B_{3x}B_{2y} \\ D = B_{1x}B_{2y}B_{3z} + B_{2x}B_{3y}B_{1z} + B_{3x}B_{1y}B_{2z} - B_{3x}B_{2y}B_{1z} - B_{2x}B_{1y}B_{3z} - B_{1x}B_{3y}B_{2z} \end{cases}$$

固定平台中心 O 到中间平面 B_1 、 B_2 、 B_3 的距离为

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (8)$$

由对称性可得 O 、 P 两点间的距离为^[3]

$$|OP| = \frac{2|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9)$$

于是向量 OP 可表示为

$$OP = |OP| \cdot e \quad (10)$$

2 二重八面体变几何桁架机器人工作空间分析的解析方法

令手部参考点 P 在基础坐标系中的位置向量 $R = (x, y, z)^T$ ，则 R 可表示3个输入杆长的函数为

$$\begin{cases} R = R(l_1, l_2, l_3) \\ l_{i\min} \leq l_i \leq l_{i\max} \quad (i=1,2,3) \end{cases} \quad (11)$$

式中 $l_{i\min}$ 和 $l_{i\max}$ 分别为 l_i 的最小极限值和最大极限值。

由于工作空间的边界为操作器手部参考点的位置奇异曲面(包括第一类奇异曲面和第二类奇异曲面)包围而成^[5,6]，下面讨论二重八面体变几何桁架机器人的奇异位置分析问题。

第一类奇异位形：二重八面体变几何桁架机器人具有两种类型的奇异位形^[3]：1) 三个驱动杆中的任何一个的长度变为零；2) 中间平面节点 B_1 、 B_2 、 B_3 共线。通过对以上奇异位形的分析可知这两种奇异位形没有发生在工作空间的边界上。

第二类奇异位形：3个广义坐标中有1个广义坐标达到极限值。且当手部参考点 P 运动时，广义坐标的运动趋势为超出移动的限制区间之外的方向，则该广义坐标在 P 点运动时，保持恒定值，而不能再作为变量，此时操作器将失去1个自由度。于是操作器手部参考点 P 的位置奇异曲面方程可表示为剩下的两个广义坐标(假定为 i 和 j)的函数

$$\begin{cases} R = R(l_i, l_j) \quad i=1,2,3; j=1,2,3; i \neq j \\ l_{i\min} \leq l_i \leq l_{i\max} \quad l_{j\min} \leq l_j \leq l_{j\max} \end{cases} \quad (12)$$

规格化后有

$$\begin{cases} R = R(u_i, v_j) \quad i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n; i \neq j \\ 0 \leq u_i \leq 10 \leq v_j \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

式中

$$\begin{cases} u_i = (l_i - l_{i\min}) / (l_{i\max} - l_{i\min}) \\ v_j = (l_j - l_{j\min}) / (l_{j\max} - l_{j\min}) \end{cases}$$

由此可见，二重八面体变几何桁架机器人工作空间的边界全部为第二类位置奇异曲面包围而成。由前述的位置正解，动平台参考点 P 的位置可表示为中间变量 q_1 、 q_2 、 q_3 的函数

$$P = f(q_1, q_2, q_3) \quad (14)$$

而中间变量可表示为输入杆长 l_i 的函数

$$q_i = g(l_1, l_2, l_3) \quad i=1,2,3 \quad (15)$$

因此，二重八面体变几何桁架机器人工作空间边界曲面的曲面方程为双参数隐函数方程。

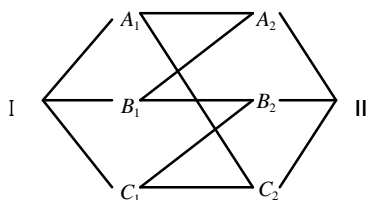


图3 工作空间的拓扑结构图

当三个驱动杆的长度都为极大值时，动平台上参考点(P 点)对应的空间位置(I 点)在工作空间的边界上。将三个驱动杆中的两个杆长固定在极大值，而将另一个驱动杆的杆长由极大变化到极小，则动平台上参考点所对应的轨迹为一条空间曲线，于是从 I 点可引出三条曲线，得到三个角点(A_1 、 B_1 、 C_1)。分析相邻两

条曲线(如 I_{A_1} 、 I_{B_1})，分别对应驱动杆1和驱动杆2长度的变化，即曲线方程为分别为 l_1 和 l_2 的函数。将 l_3 固定在极大值，而 l_1 与 l_2 在极大值与极小值之间变化，则动平台上参考点所对应的空间位置的集合为一张空间曲面片，该曲面片有四条边界曲线。除了 I_{A_1} 、 I_{B_1} 两条曲线外，还可引出两条边界曲线(A_1A_2 、 B_1A_2)。曲线 A_1A_2 对应的是将 l_1 固定在极小值， l_3 固定在极大值， l_2 在极大值与极小值之间变化时，动平台上参考点所对应的空间轨迹。曲线 B_1A_2 对应的是将 l_2 固定在极小值， l_3 固定在极大值， l_1 在极大值与极小值之间变化时，动平台上参考点所对应的空间轨迹。用类似的曲面分析方法也可得到工作空间边界上其他曲面片与机构位形之间的映射关系。由上述分析可得二重八面体变几何桁架机器人工作空间的拓扑结构如图3所示。图中 I 、 A_1 、 A_2 等符号表示一个角点位置， $I \sim A_1$ 间的连线表示一段空间曲线，四边形 $I A_1 A_2 B_1$ 表示一张空间曲面片。角点、曲线、曲面片与三个驱动构件长度之间的对应关系如表1~表3所示。

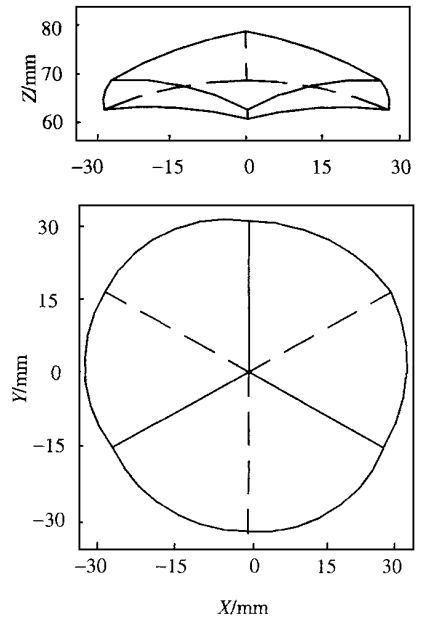


图4 工作空间边界曲面投影视图

表1 角点与三个驱动构件长度之间的对应关系

角点	I	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2	II
l_1	max	min	max	max	min	max	min	min
l_2	max	max	min	max	min	min	max	min
l_3	max	max	max	min	max	min	min	min

表2 曲线与三个驱动构件长度之间的对应关系

曲线	$I A_1$	$I B_1$	$I C_1$	$A_1 A_2$	$A_1 C_2$	$B_1 A_2$	$B_1 B_2$	$C_1 B_2$	$C_1 C_2$	$A_2 II$	$B_2 II$	$C_2 II$
l_1	变化	max	max	min	min	变化	max	max	变化	min	变化	min
l_2	max	变化	max	变化	max	min	min	变化	max	min	min	变化
l_3	max	max	变化	max	变化	max	变化	min	min	变化	min	min

表3 曲面片与三个驱动构件长度之间的对应关系

曲面片	$I A_1 A_2 B_1$	$I B_1 B_2 C_1$	$I A_1 C_2 C_1$	$B_1 A_2 II B_2$	$C_1 B_2 II C_2$	$A_1 A_2 II C_2$
l_1	变化	max	变化	变化	变化	min
l_2	变化	变化	max	min	变化	变化
l_3	max	变化	变化	变化	min	变化

由上述分析可看出，二重八面体变几何桁架机器人的工作空间是6张曲面片包围而成的闭包。

3 数值实例

已知二重八面体变几何桁架机器人结构参数如下： $L=100$ mm， $l_{max}=120$ mm， $l_{min}=80$ mm。运用前述方法，由式(1)、(5)~(10)，经编程计算得到了由6张曲面片组成的工作空间边界，并由此描绘出了其工作空间边界曲面在 XY 平面及 XZ 平面上的投影如图4所示。

4 结 论

由本文分析可以得到以下结论: 1) 二重八面体变几何桁架机器人的工作空间是由6张曲面片包围而成的闭包; 2) 曲面方程是双参数隐函数方程; 3) 解析的曲面方程对于结合工作空间研究二重八面体变几何桁架机器人的运动特性有着重要意义^[7,8]; 4) 与数值方法相比, 解析方法更精确更有效; 5) 该方法可运用于空间并联机器人和其他类型的变几何桁架机器人工作空间的分析。

参 考 文 献

- 1 Fallahi B, Lai H Y, Naghibi R, *et al* .Study of the workspace of five-bar closed loop manipulator. Mechanism and Machine Theory, 1994,29 (5): 759~765
- 2 Masofy O, Wang J. Workspace evaluation of stewart platforms. ASME Mechanism Conference, Phenix, USA, 1992: 337~346
- 3 Arun V, Padmanabhan Babu, Kolady Kirshnan. Determination of the Workspace of the 3-DOF double-octahedral variable-geometry-truss manipulator. ASME Mechanism Conference, Phenix, USA, 1992: 493~500
- 4 梁崇高, 荣 辉. 一种 Stewart 平台型机械手位移正解. 机械工程学报, 1991, 27(2): 26~30
- 5 徐礼钜, 范守文. 机器人奇异曲面及工作空间界限面分析的数字-符号法. 机械科学与技术, 2000, 19(6): 861~863
- 6 Hua Weishi. Analysis of singularities of parallel robot. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1999, 28(2): 144~147 [华为实. 并联机器人的奇异位形分析. 电子科技大学学报, 1999, 28(2): 144~147]
- 7 Tan Ying, He Zhengya, Deng Chao. An neural network approach for inverse kinematics solving of Robots. Journal of University of Electronic Science and Techndogy of China, 1998, 27(3): 310~313 [谭 营, 何振亚, 邓超. 一种机器人逆运动学求解的神经网络方法. 电子科技大学学报, 1998, 27(3): 310~313]
- 8 Fan Shouwen. Software system for automatic generation of robotic dynamic model. Journal of University of Electronic Science and Techndogy of China, 1995, 24(3): 249~254 [范守文, 徐礼钜. 机器人动力学自动建模软件系统. 电子科技大学学报, 1995, 24(3): 249~254]

Closed Form Solution to Workspace of Double-octahedron Variable Geometry Truss Robotic Manipulators

Fan Shouwen

(Dept. of Electromechanical Eng., UEST of China Chengdu 610054)

Xu Liju Gan Quan

(School of Manufacturing Sci. & Eng., Sichuan University Chengdu 610065)

Abstract Boundary surface analysis method for workspace of double-octahedron variable geometry truss robotic manipulators (VGTRM) is proposed in this paper. Based on surface analysis and analytical method of direct displacement analysis, the analytical surface equations of double-octahedron VGTRM are derived. Precise shape of double-octahedron VGTRM's workspace boundary surface is drawn. Analysis and calculations show that the workspace of double-octahedron VGTRM is enveloped by six surface patches.

Key words variable geometry truss; manipulator; workspace; analytical method; surface equation