第 30 卷 第 2 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.30 No.2
2001 年 4 月　　Journal of UEST of China　　Apr. 2001

逆 H 矩阵的性质*

王广彬**　　黄廷祝

(电子科技大学应用数学系　成都　610054)

【摘要】研究了在理论和实际应用中有重要用途的 M 矩阵、H 矩阵的相关问题。定义了逆 H 矩阵的概念，并对其性质进行了研究。获得了逆 H 矩阵与逆 M 矩阵的关系、逆 H 矩阵的判定、逆 H 矩阵的 Hadamard 积的性质、与矩阵对角占优性的关系等基本性质。

关　键　词　M 矩阵；H 矩阵；逆 M 矩阵；逆 H 矩阵；Hadamard 积

中图分类号　O151.21;　O241.6

记 $\boldsymbol{R}^{n,n}$ 表示 n 阶实方阵的集合，$\boldsymbol{C}^{n,n}$ 表示 n 阶复方阵的集合。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n,n}$，且

$$a_{ij} \leqslant 0 \qquad i \neq j \qquad i, j=1,2,\cdots,n$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{Z}$-型矩阵。若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{Z}$-型矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1} \geqslant 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇 $\boldsymbol{M}$ 矩阵。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{C}^{n,n}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵 $<\boldsymbol{A}>=(m_{ij})$ 为非奇 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇 $\boldsymbol{H}$ 矩阵。其中

$$m_{ij}=\begin{cases} |a_{ii}| & i=j \\ -|a_{ij}| & i \neq j \end{cases}$$

$\boldsymbol{M}$ 矩阵和 $\boldsymbol{H}$ 矩阵及相关矩阵类是计算数学、数学物理等中的重要矩阵类，引起人们的广泛关注和研究[1~7]。在 $\boldsymbol{M}$ 矩阵研究的基础上，为满足实际需要，文献[1]等提出并研究了逆 $\boldsymbol{M}$ 矩阵的性质。定义了逆 $\boldsymbol{H}$ 矩阵的概念，并对其基本性质和判定等进行了研究和探讨。

1　逆 H 矩阵的定义与基本性质

定义 1　对于一个非奇矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为逆 $\boldsymbol{H}$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{H}^{-1}$。若 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为逆 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}^{-1}$。

若无特别说明，所有矩阵均为 n 阶复方阵。记 $\boldsymbol{D}^{+}$ 为所有正对角矩阵的集合；$r(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径。

下面讨论 $\boldsymbol{H}^{-1}$ 的若干性质。

定理 1　$\boldsymbol{M}^{-1} \subset \boldsymbol{H}^{-1}$。

证明　设 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵，显然 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 矩阵，即 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{H}^{-1}$，故 $\boldsymbol{M}^{-1} \subset \boldsymbol{H}^{-1}$。

定理 2　若 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{D}\in \boldsymbol{D}^{+}$，则 $\boldsymbol{DA}\in \boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{AD}\in \boldsymbol{H}^{-1}$。

证明　由 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{H}^{-1}$、$\boldsymbol{D}\in \boldsymbol{D}^{+}$ 知 $\boldsymbol{DA}$ 非奇。又有 $(\boldsymbol{DA})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}$，故由 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 矩阵、$\boldsymbol{D}^{-1}\in \boldsymbol{D}^{+}$ 知，$(\boldsymbol{DA})^{-1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 矩阵。故 $\boldsymbol{DA}\in \boldsymbol{H}^{-1}$。同理可证 $\boldsymbol{AD}\in \boldsymbol{H}^{-1}$。

定理 3　若 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{H}^{-1}$，则对 $a\in R, r(a\boldsymbol{A}^{-1})<1$，有 $\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{I}\in \boldsymbol{H}^{-1}$。

证明　由于

$$(\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{I})^{-1}=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+a\boldsymbol{A}^{-1})]^{-1}=(\boldsymbol{I}+a\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

则对 $r(a\boldsymbol{A}^{-1})<1$，有

$$(\boldsymbol{I}+a\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{I}-a\boldsymbol{A}^{-1}+(a\boldsymbol{A}^{-1})^{2}-(a\boldsymbol{A}^{-1})^{3}+\cdots$$

2000年10月18日收稿

* 四川省青年科技基金资助项目，编号：Jsa1081

** 男　25岁　硕士

因 $A\in H^{-1}$，故 A^{-1} 为 H 矩阵。显然 $(I+aA^{-1})^{-1}$ 为 H 矩阵。故 $(A+aI)^{-1}$ 为 H 矩阵，即 $A+aI\in H^{-1}$。

定理 4　若 $A\in H^{-1}, D\in D^{+}, r(A^{-1}D)<1$，则 $A+D\in H^{-1}$。

证明　因 $A\in H^{-1}$，故 $D^{-1}A\in H^{-1}$。又 $r(D^{-1}A)<1$，由定理3可知

$$D^{-1}A+I\in H^{-1}$$

由 $D\in D^{+}$，有

$$D(D^{-1}A+I)=A+D\in H^{-1}$$

定义 2[2]　设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$，若 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|(i=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为按行严格对角占优矩阵；若 $|a_{jj}|>\sum_{i\neq j}|a_{ij}|(j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为按列严格对角占优矩阵。

引理 1[2]　设 $A\in M^{-1}$，则存在一个 $D\in D^{+}$，使 DA 是按列严格对角占优矩阵。

由引理1可知，也存在一个 $D\in D^{+}$，使 AD 是按行严格对角占优矩阵。

定理 5　设 $A\in H^{-1}$，则存在一个 $D\in D^{+}$，使 $D<A^{-1}>^{-1}$ 是按列严格对角占优矩阵。

证明　因 $A\in H^{-1}$，故 A^{-1} 是 H 矩阵，从而 $<A^{-1}>$ 是 M 矩阵，所以 $<A^{-1}>^{-1}\in M^{-1}$。由引理1可知，存在一个 $D\in D^{+}$，使 $D<A^{-1}>^{-1}$ 是按列严格对角占优矩阵。

定义 3[3]　两个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n,n}$，$B=(b_{ij})_{n,n}$ 的 Hadamard 积是指方阵

$$A\cdot B=(a_{ij}b_{ij})_{n,n}$$

推论 1　若 A 为非奇 H 矩阵，$B\in H^{-1}$，则 $A<B^{-1}>^{-1}$ 为非奇 H 矩阵。

证明　由 A 为非奇 H 矩阵可知，$D_1=\mathrm{diag}(d_1^{(1)},d_2^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})\in D^{+}$，使 AD_1 是严格对角占优矩阵。由 $B\in H^{-1}$ 可得，$D_2=\mathrm{diag}(d_1^{(2)},d_2^{(2)},\cdots,d_n^{(2)})\in D^{+}$，使 $<B^{-1}>^{-1}D_2$ 是按行严格对角占优矩阵。显然有 $D=D_1D_2\in D^{+}$，且 $(A\circ B)D$ 满足

$$|a_{ii}||b_{ii}|d_i^{(1)}d_i^{(2)}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|d_j^{(1)}|b_{ii}|d_i^{(2)}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}||b_{ij}|d_j^{(1)}d_j^{(2)}\qquad i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

可见，$(A\circ<B^{-1}>^{-1})D$ 为严格对角占优矩阵，故 $A\circ<B^{-1}>^{-1}$ 为非奇 H 矩阵。

逆 H 矩阵 A 有一个有趣的性质，即 $<A^{-1}>^{-1}$ 的零元素保持幂不变性。

定理 6　设 $A=(a_{ij})_{n,n}\in H^{-1}$，$<A^{-1}>^{-1}=(b_{ij})_{n,n}$，对任意正整数 t，$(<A^{-1}>^{-1})^{t}=(b_{ij}^{(t)})_{n,n}$，则对 $\forall i,j=1,2,\cdots,n$

$$b_{ij}^{(t)}=0\Leftrightarrow b_{ij}=0$$

证明　因 $A\in H^{-1}$，故 A^{-1} 是 H 矩阵，从而 $<A^{-1}>$ 是 M 矩阵。令 $<A^{-1}>=sI-B, s>r(B), B\geqslant 0$，有

$$\frac{1}{s}<A^{-1}>=I-\frac{1}{s}B$$

由此可见

$$<A^{-1}>^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^{k}}{s^{k+1}}\tag{1}$$

则

$$(<A^{-1}>^{-1})^{t}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^{k}}{s^{k+1}}\right)^{t}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kB^{k}\tag{2}$$

式中　$c_k>0, k=1,2,\cdots$。

若 $b_{ij}^{(t)}=0$，则由式(2)可知，必有 $b_{ij}^{(\kappa)}=0, k=1,2,\cdots$，这里 $B^{k}=(b_{ij}^{(\kappa)})_{n,n}$。由式(1)可得 $b_{ij}=0$。反之，若 $b_{ij}=0$，则由式(1)可知，必有 $b_{ij}^{(\kappa)}=0, k=1,2,\cdots$。由式(2)可得 $b_{ij}^{(t)}=0$。

参 考 文 献

1 Johnson Charles R. Inverse ***M***-Matrices. Lin Alg Appl, 1982, 47: 195~216

2 **逄明贤．矩阵谱论.吉林:吉林大学出版社**，1989

3 Berman A, Plemmons R, J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. New York: Academic Press, 1979

4 Huang T Z. A note on generalized diagonally dominant matrices. Lin Alg Appl, 1995, 225: 237~242

5 Huang Tinzhu. Estimates for $\|A^{-1}\|_\infty$ and singular value block ***H***-matrices. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1995, 25(4):441~444 [**黄廷祝．块 *H* 阵**$\|A^{-1}\|_\infty$**的上界和最小奇异值的下界．电子科技大学学报**，1996, 25(4): 441~444]

6 Huang Tinzhu. Sufficient conditions for generalized diagonal dominant matrices. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1995, 24(5): 549~554 [**黄廷祝．广义对角占优矩阵的充分条件．电子科技大学学报**, 1995, 24(5):549~554]

7 Huang Tinzhu. The time complexity of determination of a nonsingular ***H***-Matrix. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1994, 23(6): 649~653 [**黄廷祝．快速判别** *H* **矩阵计算复杂性．电子科技大学学报**, 1994, 23(6):649~653]

Properties of Inverse *H*-Matrices

Wang Guangbin Huang Tingzhu

(Dept. of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, related questions of ***M***-matrices and ***H***-matrices are studied. The concept of inverse ***H***-matrices is defined. The relationship between the inverse ***M***-matrices and the inverse ***H***-matrices, criteria for the inverse ***H***-matrices, properties of the Hadamard product of inverse ***H***-matrices，relationship between the inverse ***H***-matrices and diagonal dominance of matrices are presented. A kind of matrix class is generalized.

Key words ***M***-matrix; ***H***-matrix; inverse ***M***-matrix; inverse ***H***-matrix; Hadamard product