第30卷 第2期　　电子科技大学学报　　Vol.30 No.2
2001年4月　　Journal of UEST of China　　Apr. 2001

一类输入饱和的线性系统的输入到状态镇定*

叶华文**　　戴冠中　　王　红

(西北工业大学自动控制系　西安　710072)

【摘要】 研究了一类输入饱和线性系统的输入到状态镇定(IS)。输入饱和线性系统 IS 镇定的结论表明，如果一个输入饱和的线性系统可控，且其非受控系统临界稳定，则可被一个简单的线性反馈律输入到状态镇定，给出了一个联级系统的镇定设计。

关　键　词　输入饱和；李雅普若夫函数；输入到状态镇定；联级系统

中图分类号　O231

输入到状态镇定 IS 的研究始于90年代末，实践中输入往往受到限制。对一个输入饱和的线性系统，文献[1]分析了其有限增益稳定，文献[2]考察了其扰动解耦，文献[3]给出了其概念框架和基本原理。一个系统被证明可以 IS 镇定，说明系统获得了某种鲁棒性，而且当该系统与别的系统联级在一起时，其 IS 可镇定性可为复合系统的镇定提供依据。本文在确立输入饱和线性系统 IS 镇定的有关结论之后，给出了一类联级系统的镇定设计。

本文研究的输入饱和的线性系统如下

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}s(v) \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in R^{n\times m}$，$v$ 为输入；系统满足假设：

1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\leqslant 0$；

2) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为可控对；

3) 饱和函数 s 具有如下特性：

(1) $s(s)=[s_1(s_1),\cdots,s_m(s_m)]^T$；

(2) s_i 局部 Lipschitz 有界，且 $s_i(0)=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$；

(3) 对正数 a,b,K 和可测函数 $t_i: R\to[a,b]$，有

$$\begin{cases} |s_i(x)|\leqslant K \\ |s_i(x)-t_i(x)x|\leqslant Kxs_i(x) \qquad x\in R, i=1,2,\cdots,m \end{cases}$$

引理 1　对任意正数 h,m,v，$mv\leqslant\frac{1}{4h}m^2+hv^2$ (运用 Young 不等式易证此结论)。

引理 2　如果 $R^{n\times n}$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\leqslant 0$，$\boldsymbol{B}\in R^{n\times m}$，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为可控对，则

$$\forall r>0 \qquad \mathrm{Re}\, l\{\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\}<0$$

证明　由于 $\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$ 与其转置 $\boldsymbol{A}^T-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$ 的特征值相同，要证明 $\forall r>0, \mathrm{Re}\, l\{\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\}<0$，只要证明线性系统 $\dot{x}=(\boldsymbol{A}^T-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{x}$ 渐近稳定。取函数 $V=\frac{1}{2r}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$，沿 $\dot{x}=(\boldsymbol{A}^T-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{x}$ 的解求时间导数，得到 $\dot{V}=\frac{1}{2r}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}$。若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T<0$，则结论得证。否则，若令集合 $M=\{\boldsymbol{x}\in R^n:\dot{V}=0\}$，容易验证 $M=\{0\}$。事实上，$\dot{V}=0\Rightarrow\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}=0$，此式连续求导

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^T\left[\boldsymbol{B}\vdots(\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{B}\vdots\cdots\vdots(\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{n-1}\boldsymbol{B}\right]=0$$

2000年10月13日收稿

* 国家自然科学基金资助项目，基金号：19771066；国家重点基础研究发展规划项目专项经费资助项目，编号: G1998030417

** 男　32岁　博士生

又$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可控，则

$$\Rightarrow \text{rank}\left[\boldsymbol{B} \vdots (\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{B} \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^{n-1}\boldsymbol{B}\right]=n$$

故得到$\dot{V}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x}^T=0$，从而有$M=\{0\}$。根据有关稳定性定理，即知道线性系统$\dot{x}=(\boldsymbol{A}^T-r\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{x}$是渐近稳定的。 证毕

运用引理2并参照文献[1]中引理的证明方法，易得引理3。

引理 3 如果以下条件成立：

1) $R^{n\times n}$矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\leqslant 0$；

2) $\boldsymbol{B}\in R^{n\times m}$，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$为可控对；

3) 对正数c,d，$R^{m\times m}$矩阵$\boldsymbol{D}$满足$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}^T\geqslant c\boldsymbol{I}$，$\|\boldsymbol{D}\|\leqslant d$。存在对称正定矩阵$\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^T)+(\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{P}\leqslant -\boldsymbol{I}$$

考察非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$；$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$；f关于$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$局部Lipschitz，$f(0,0)=0$。

定义 1 设系统(2)是IS稳定的，如果对每个初始状态x_0和每个本征有界的输入$u(\cdot)$成立：$|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant b(|x_0|,t)+g(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t}|\boldsymbol{u}(t)|)$（$b$为$KL$类函数，$g$为$K$类函数）；称为系统(2) IS可镇定，如果存在可微函数$K:R^n\to R^m, K(0)=0$，使$\dot{x}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v})$关于新输入$\boldsymbol{v}$是IS稳定的。

引理 4[4] 系统(2)IS稳定的充要条件是，对正定径向无界函数V和K_∞类函数a_1,a_2 [3]

$$\dot{V}_{(2)}\leqslant -a_1(|\boldsymbol{x}|)+a_2(|\boldsymbol{u}|)$$

式中 $\dot{V}_{(2)}$为V沿系统(2)解的时间导数。

1 主要结果

定理 1 满足假设1)~3)的系统(1)可用控制律$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}$ IS镇定。

证明 $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}$ IS镇定系统(1)成立，即要证明$\dot{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}s(-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})$关于$\boldsymbol{u}$是IS稳定的。从函数$s$的特性(3)知道其为奇函数，因此等价地只要证明

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{B}s(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

是IS稳定的。取Liapunov函数$V_1=\dfrac{|\boldsymbol{x}|^3}{3}$，令$z\triangleq \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$，根据假设1)和函数$\boldsymbol{s}$的特性(3)，有

$$\dot{V}_{1(3)}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|[(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})^T s(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}^T s(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})]\leqslant$$

$$-|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}^T s(\boldsymbol{z})+K|\boldsymbol{x}|\|\boldsymbol{u}|$$

系统(3)重写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{B}^T]\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}[\boldsymbol{t}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{z}-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{z})-\boldsymbol{t}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{u}]$$

式中 [illegible]$=\mathrm{diag}(t_1($[illegible]$_1),\cdots,t_m($[illegible]$_m))$，[illegible]$\in R^m$ $t_i(i=1,2,\cdots,m)$满足函数s的特性(3)，于是

$$\begin{cases} a\boldsymbol{I}\leqslant t(z)\leqslant b\boldsymbol{I} \\ \|t(z)z-s(z)\|\leqslant Kz^T s(z^T) \end{cases} \tag{4}$$

易验证，$A,B,t(z)$满足引理3的条件，因此存在正定矩阵$\boldsymbol{P}$，使

$$P(A-B\hat{o}(z)B^T)+(A^T-B\hat{o}(z)B^T)P\leqslant -I \tag{5}$$

针对重写的系统(3)，构造函数$V_2=\frac{1}{2}x^TPx$，运用式(4)、(5)，可得

$$\dot{V}_{2(3)}\leqslant -\frac{1}{2}|x|^2+K\|PB\|\|x\|z^T s\ (z)+b\|PB\|\|x\|\|u\|$$

构造复合 Liapunov 函数$V=K\|PB\|V_1+V_2$，显然正定径向无界，运用引理1演算得到

$$\dot{V}_{(3)}\leqslant -\frac{1}{4}|x|^2+l^{\ 2}|u|^2$$

式中　$l\triangleq K^2\|PB\|+b\|PB\|$。令$a_1(s)=\frac{1}{4}s^2$，$a_2(s)=l^2s^2$，显然都是$K_\infty$类函数，由引理4可得系统(3)IS 稳定。　　证毕

2　应　用

IS 镇定因其与系统的鲁棒稳定密切相关而具有重要理论和实践意义，而且适合处理联级系统的镇定。文献[5]讨论了一类联级系统，但只要求饱和函数全局 Lipschitz，设计的控制律也比较复杂。运用 IS 稳定的结论，设计将变得简单。考察如下$(n+m)$一维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bs\ (z)\\ \dot{z}=u\end{cases} \tag{6}$$

式中　$x\in R^n, z\in R^m$, $u=(u_1,\cdots,u_m)\in R^m$，$A,B,s$ 满足假设1)~3)。

引理 5[3]　联级系统$\begin{cases}\dot{z}=f(z,y)\\ \dot{y}=g(y)\end{cases}$为全局渐近稳定的一个充分条件是：$\dot{z}=f(z,y)$关于$y$为 IS 稳定，且$\dot{y}=g(y)$是全局渐近稳定的。

下面给出系统(6)的镇定控制律。令$w=z+B^Tx$，系统(6)表示为

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bs\ (-B^Tx+w)\\ \dot{w}=u+B^T[Ax+Bs\ (z)]\end{cases} \tag{7}$$

式中　$u=-w-B^T[Ax+Bs\ (z)]$，得到相应于式(7)的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bs\ (-B^Tx+w)\\ \dot{w}=-w\end{cases} \tag{8}$$

根据定理1和引理5，可得$u=-z-B^Tx-B^T[Ax+Bs\ (z)]$镇定系统(6)。

3　结 束 语

本文证明了一类输入饱和的可控线性系统如果其非受控系统临界稳定[6]，那么可以用由系统本身参数确定的线性反馈律 IS 镇定。本文的应用举例说明了系统的 IS 稳定性有助于联级系统的镇定设计。拓展本文结论可望给出积分器链等一类系统的有界控制设计，拟将另文讨论。

参 考 文 献

1 Liu W, Chitour Y, Sontag E D. On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation. SIAM J Control and Optimization, 1996,34(4): 1 190~1 219

2 Lin Z, Saberi A, Teel A R. The almost disturbance decoupling problem with internal stability for linear systems subject to input saturation —— state feedback case. Automatica, 1996, 32(4): 619~624

3 Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. IEEE Trans Automa Contr, 1989, 34(4): 435~443

4 Sontag E D. On characterizations of the input-to-state stability property. Syst Contr Lett, 1995,24: 351~359

5 Sussmann H J, Sontag E D, Yang Y. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. IEEE Trans Automa Contr, 1994, 39: 2 411~2 425

6 Zhong Shouming Huang Yuanqing. BIBO Stabilization of nonlinear systems with time-delay. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000,29(6):655~657 [**钟守铭**, **黄元清**. **具有时滞的非线性系统的** BIBO **稳定性**. **电子科技大学学报**，2000, 29(6):655~657]

Study on Input-to-state Stabilization of a Class of Linear Systems Subject to Input Saturation

Ye Huawen Dai Guanzhong Wang Hong

(Dept. of Automatic Control, Northwestern Polytechnic University Xi' an 710072)

Abstract This paper deals with input-to-state stabilization of a class of input-saturated linear systems. A simple linear feedback controller is constructed by which the input-to-state stabilizes the class of input-saturated systems with two properties, namely that the uncontrolled systems are critical stable and a standard controllable condition holds. As an application, a feedback law is designed to stabilize a cascade system.

Key words input saturation; Liapunov functions; input-to-state stabilization; cascade systems