第 30 卷 第 2 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.30 No.2
2001 年 4 月 Journal of UEST of China Apr. 2001

关于模糊鞅的收敛理论

万会芳*
(四川商业高等专科学校 成都 610051)

【摘要】 定义了 Fuzzy 集的几种范数以及 Fuzzy 随机变量序列一致可积的概念，得出了 Fuzzy 随机变量序列一致可积与 Fuzzy 集的几种范数之间的关系；并将集值鞅成立的一个重要结论推广到 Fuzzy 鞅，证明了 Fuzzy 鞅按距离 d_∞, d_1 的收敛性定理。

关 键 词 范数； 一致可积； 模糊鞅； 模糊下鞅
中图分类号 O159

1 预备知识

首先引入以下几种范数[1]：对 $v\in F(R^n)$，令

$$\|v\| = d_\infty(v, c_{\{0\}}) = \sup_{a>0}\|L_a v\|$$

对 $u,v\in F_c(R^n)$，令

$$\|v\|_u = \inf\{c\geqslant 0 \mid \|v\|\leqslant c\|u\|\}$$

对 $v\in F_{cl}(R^n), u\in F_c(R^n)$，令

$$\|v\|_{ul} = \|v\|_u + \sup_{\substack{a,b\in(0,1]\\ a\neq b}}\frac{d_H(L_a v, L_b v)}{|a-b|}$$

定义 1 称随机集序列 $\{f_n, n>1\}$ 是一致可积[2]，如果 $\{\|f_n\|, n>1\}$ 是一致可积，即

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\int_{\{w:\|f_n\|>c\}}\|f_n\|\,\mathrm{d}p = 0$$

定义 2 称 FRV 序列 $\{X_n, n>1\}$ 是一致可积[3]，如果 $\forall a\in(0,1]$，则 $\{L_a X_n, n>1\}$ 是一致可积。

2 主要结果

定理 1 记 $S^{n-1} = \{x\in R^n \mid \|x\| = 1\}$，若 FRV 序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是一致可积，则对 $\forall a\in(0,1],\ \forall x\in S^{n-1}$，$\{S_{X_n}(a,x)^{[4]}, n\geqslant 1\}$ 是一致可积。

证明 由 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 一致可积知，$\forall a\in(0,1], \forall x\in S^{n-1}$，有

$$0\leqslant \sup_{n\leqslant 1}\int_{\{w:|S_{X_n}(a,x)|>c\}}|S_{X_n}(a,x)|\,\mathrm{d}p\leqslant$$
$$\sup_{n\geqslant 1}\int_{\{w:\|L_a X_n\|>c\}}\|L_a X_n\|\,\mathrm{d}p\to 0\ (c\to\infty)$$

所以 $\sup_{n\leqslant 1}\int_{\{w:|S_{X_n}(a,x)|>c\}}|S_{X_n}(a,x)|\,\mathrm{d}p\to 0\quad (c\to\infty)$，即 $\{S_{X_n}(a,x), n\geqslant 1\}$ 是一致可积。

定理 2 若 $\{\|X_n\|_{ul}, n\geqslant 1\}$ 一致可积，则 $\{\|X_n\|, n\geqslant 1\}$ 是一致可积。

证明 由于 $\{\|X_n\|_{ul}, n\geqslant 1\}$ 一致可积，则

$$\sup_{n\geqslant 1}\int_{\{w:\|X_n\|_{ul}>c\}}\|X_n\|_{ul}\,\mathrm{d}p\to 0 (c\to\infty)$$

又由于 $\|X_n\|\leqslant\|u\|\|X_n\|_{ul}$，所以

2000年5月9日收稿
* 女 34岁 硕士 讲师

$$0\leqslant\sup_{n\geqslant1}\int_{\{w:\|X_n\|>c\}}\|X_n\|\mathrm{d}p\leqslant\sup_{n\geqslant1}\int_{\{w:\|X_n\|_{ul}\cdot\|u\|>c\}}\|u\|\,\|X_n\|_{ul}\mathrm{d}p=\|u\|\sup_{n\geqslant1}\int_{\left\{w:\|X_n\|_{ul}>\frac{c}{\|u\|}\right\}}\|X_n\|_{ul}\mathrm{d}p\to0(c\to\infty)$$

故 $\sup_{n\geqslant1}\int_{\{w:\|X_n\|>c\}}\|X_n\|\mathrm{d}p\to0\ (c\to\infty)$，即 $\{\|X_n\|,n\geqslant1\}$ 一致可积。

定理 3 设 $\{X_n,F_n,n\geqslant1\}$ 是 F 鞅[5]，且 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 一致可积，则存在唯一积分有界的 $F_c(R^n)$ 值 FRV X_∞，使得 $\forall n\geqslant1$，有 $E(X_\infty/F_n)=X_n$ a.e.。

证明 由于 $\{X_n,F_n,n\geqslant1\}$ 是 F 鞅，$\{X_n,n\geqslant1\}$ 一致可积，则对 $\forall a\in(0,1],\{L_aX_n,F_n,n\geqslant1\}$ 是集值鞅，$\{L_aX_n,n\geqslant1\}$ 一致可积，由文献[3]定理9.5.6得，存在唯一积分有界的 $K_c(R^n)$ 值随机集 $f_\infty(a)$，使得对 $\forall n\geqslant1$，有 $E(f_\infty(a)/F_n)=L_aX_n$a.e.，并且可证 $\{f_\infty(a),a\in(0,1]\}$ 是随机集合套(反证)：假设 $\{f_\infty(a\},a\in(0,1]\}$ 不是随机集合套，则 $\exists a_1,a_2\in(0,1],a_1\geqslant a_2$，使得 $f_\infty(w)(a_1)\supseteq f_\infty(w)(a_2)$，因此

$$E\frac{f_\infty(a_1)}{F_n}(w)\supseteq E\frac{f_\infty(a_2)}{F_n}(w)$$

由 $E\dfrac{f_\infty(a)}{F_n}=L_aX_n$ a.e. 得 $L_{a_1}(X_n)(w)\supseteq L_{a_2}(X_n)(w)$，这与 $\{L_aX_n,a\in(0,1]\}$ 是随机集合套矛盾，因此 $\{f_\infty(a),a\in(0,1]\}$ 是随机集合套。现令 $L_aX_\infty=f_\infty(a)$，则 X_∞ 是积分有界的 $F_c(R^n)$ 值 FRV，且

$$L_aE\frac{X_\infty}{F_n}=E\frac{L_aX_\infty}{F_n}=E\frac{f_\infty(a)}{F_n}=L_aX_n\ \text{a.e.}$$

当 $a=0$ 时，显然有 $L_0E\dfrac{X_\infty}{F_n}=L_0X_n$ a.e.，所以 $E\dfrac{X_\infty}{F_n}=X_n$ a.e.，故结论成立。

定理 4 设 $\{X_n,F_n,n\geqslant1\}$ 是 $F_{cl}(R^n)$ 值 F 下鞅，$u\in F_{cl}(R^n),\sup_{n\geqslant1}E\|X_n\|_{ul}<\infty$，则存在唯一的积分有界的 FRV X，使 $d_\infty(X_n,X)\to0(n\to\infty)$a.e.。特别地，若 $\{\|X_n\|,n\geqslant1\}$ 一致可积，则

$$D(X_n,X)\to0(n\to\infty)$$

式中 $D(X_n,X)=E(d_\infty(X_n,X))$。

证明 前半部分的证明见文献[1]定理5.2。本文证后半部分，由于 $\{\|X_n\|,n\geqslant1\}$ 一致可积，X 积分有界，则 $\{\|X_n\|+\|X\|,n\geqslant1\}$ 一致可积，由 $d_\infty(X_n,X)\leqslant\|X_n\|+\|X\|$ 得 $\{d_\infty(X_n,X),n\geqslant1\}$ 一致可积，又因为 $d_\infty(X_n,X)\to0(n\to\infty)$a.e.，由文献[6]定理1.4.4知，$E(d_\infty(X_n,X))\to0(n\to\infty)$，即 $D(X_n,X)\to0(n\to\infty)$。

推论 设 $\{X_n,F_n,n\geqslant1\}$ 是 $F_{cl}(R^n)$ 值 F 下鞅，$u\in F_{cl}(R^n),\sup_{n\geqslant1}\mathrm{E}\|X_n\|_{ul}<\infty$，则存在唯一积分有界的 FRV X，使得 $d_1(X_n,X)\to0(n\to\infty)$a.e.。特别地，若 $\{\|X_n\|,n\geqslant1\}$ 一致可积，则

$$D_1(X_n,X)\to0(n\to\infty)$$

式中 $D_1(X_n,X)=E(d_1(X_n,X))$[7,8]。

证明 由 $d_1(X_n,X)\leqslant d_\infty(X_n,X)$ 即得。

3 结束语

由于从 $\forall a\in(0,1],d_H(L_aX_n,L_aX)\to0(n\to\infty)$，不能直接推出 $\sup_{a\in(0,1]}d_H(L_aX_n,L_aX)\to0\,(n\to\infty)$，即 $d_\infty(X_n,X)\to0\ (n\to\infty)$，故 F 鞅的收敛问题不能简单地直接通过取截集后由集值鞅的收敛问题得到，其收敛问题比集值鞅的收敛问题要复杂一些，需添加一定的条件。

参 考 文 献

1 Puri M L, Ralescu D A. Convergence theorem for fuzzy martingales. JMAA, 1991, 160:107~122

2 张文修, 王国俊, 刘旺金, 等. 模糊数学引论. 西安: 西安交通大学出版社, 1991: 289~340

3 Feng Yuhu. Convergence theorems for fuzzy random variables and fuzzy martingales. Fuzzy Sets and Systems,1999,103: 435~441

4 万会芳. 模糊随机变量的方差. 四川师范大学学报(自然科学版), 1999, 22(6): 631~635

5 万会芳. 模糊鞅. 四川商业高等专科学校学报, 2000, 2: 35~37

6 Guo Shuangbing. Fuzzy continuous functions and sequent convergence of fuzzy functions. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000, 29(5):552~555[郭双冰. Fuzzy 值连续函数与 Fuzzy 值函数的序列收敛. 电子科技大学学报, 2000, 29(5):552~555]

7 Yao Min, Huang Yanjun. Fuzzy consistent relation and applications. Journal of University of Electronic Science and Technology of China,1997, 26(6):632~635 [姚　敏, 黄燕君. 模糊一致关系及应用. 电子科技大学学报, 1997, 26(6): 632~635]

Convergence Theorems for Fuzzy Martingales

Wan Huifang

(Sichuan Business College　Chengdu　610051)

Abstract　This paper defines the conception of uniformly integrability and the norms of Fuzzy set, and gets the relation between the norms of Fuzzy set and the uniformly integrability of Fuzzy random variable. Based on the analysis, the important results on Fuzzy martingales and the convergence of Fuzzy martingales according to the distances d_{∞}, d_1 are given.

Key words　norm;　uniformly integrability;　fuzzy martingales;　fuzzy lowermartingales