第 30 卷　第 2 期　　　　电 子 科 技 大 学 学 报　　　　Vol.30　No.2
2001 年 4 月　　　　Journal　of　UEST　of　China　　　　Apr. 2001

# 引力场两个定理的探讨

苏万春*
(广州航海高等专科学校　广州　510725)

【摘要】从引力场是矢量场出发，讨论了引力场的性质，引入了描述引力场的高斯定理和环路定理，得出了相应的微分和积分形式。根据引力场的两个定理，导出了引力势的微分和积分形式。

关　键　词　引力场；　引力场强；　引力势；　高斯定理；　环路定理
中图分类号　O314

任何物体都在自己周围的空间建立了一个引力场，其基本性质是使处在其中的任何其他物体受到一个作用力，即引力，通过引力场传递。引力场是矢量场，是空间坐标的矢量函数。因此，可以采用与研究其他矢量场相类似的方法研究引力场。

## 1　引力场中的高斯定理

设质量为 $m$ 的质点产生的引力场强为[1]

$$\boldsymbol{g} = -\frac{Gm}{r^2}\boldsymbol{r}_0$$

引力场强 $\boldsymbol{g}$ 通过矢量面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的引力通量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{Gm}{r^2}\boldsymbol{r}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \overset{r_0 \| \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{=\!=} -Gm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^2}$$

式中　$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r^2} = \mathrm{d}W$ 是球面度，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -Gm\mathrm{d}W$$

对于闭合曲面 $S$，如果将 $m$ 包围在内，则通过它的通量为 $\Phi = -4pGm$，否则为零。若物体不是一个质点，根据通量的叠加原理，可以得到质点组通过闭合曲面 $S$ 的通量为

$$F = -4pG\sum_{\substack{i \\ (s\text{内})}} m_i \tag{1}$$

即有

$$F = \oint\!\!\oint_{(s)} \boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -4pG\sum_{\substack{i \\ (s\text{内})}} m_i$$

上式为高斯定理的积分表达式，表述为：通过任意闭合曲面的引力通量等于该曲面所包围的所有质点的和乘以 $-4\text{ð}\,G$，而与闭合曲面外的质点无关。

由矢量场的高斯公式

$$\oint\!\!\oint_{(s)} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_{(v)} \tilde{\boldsymbol{N}}\cdot\acute{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}v$$

得

$$\oint\!\!\oint_{(s)} \boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_{(v)} \tilde{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}v$$

将上式与式(1)比较可得

2000年4月10日收稿
*　男　35岁　大学　讲师

$$\iiint\limits_{(v)} \tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g}\mathrm{d}v = -4pG\sum_{\substack{i \\ (s内)}} m_i =$$

$$-4pG\iiint\limits_{(v)} r\mathrm{d}v$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g} = -4pGr \tag{2}$$

式(2)表明引力场强的散度始终小于零，即该处有尾闾，其大小反映了尾闾的强弱，说明引力场是有散场，式(2)正是引力场高斯定理的微分形式。

## 2　引力场的环路定理

由矢量场理论可知：如果$W$是空间线单连通区域，那么矢量场 $\boldsymbol{s} = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}$ 在$W$内是有势场与曲线积分 $\int_L \boldsymbol{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在$W$内与路径无关，是等价的。引力场是有势场，所以，引力场强 $g$ 的曲线积分与路径无关，如图1所示。引力场强 $g$ 沿闭合曲线 $l$ 的曲线积分为

$$\oint_{(e)} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{a\,(c)}^{b} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{b\,(d)}^{a} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} =$$

$$\int_{a\,(c)}^{b} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_{a\,(d)}^{b} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

则

$$\oint_{(l)} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{3}$$

式(3)称为引力场中的环路定理，可表述为：引力场强 $g$ 沿任一条有向闭合曲线 $l$ 的曲线积分 $\oint_{(l)} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 恒等于零，式(3)是环路定理的积分形式。

由矢量场的斯托克斯公式 $\oint_{(l)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \iint_{(s)} (\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 得

$$\oint_{(l)} \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_{(s)} (\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

将上式与式(3)比较得

$$\iint_{(s)} (\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g} = 0 \tag{4}$$

式(4)表明引力场强 $g$ 的旋度为零，引力场是无旋场，式(4)是引力场的环路定理的微分形式。

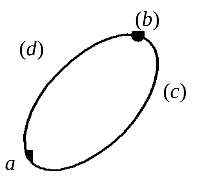


图1　引力场强的曲线积分与路径无关

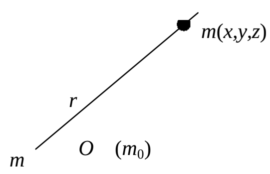


图2　质点形式的引力势

## 3　由引力场的两个定理导出引力势

引力场的高斯定理和环路定理说明了引力场是有散场和无旋场，即

$$\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g} = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g} = -4pGr$$

由于 $\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g} = 0$，故可令 $\boldsymbol{g} = \tilde{\boldsymbol{N}}U$，则有

$$\tilde{\boldsymbol{N}} \cdot \boldsymbol{g} = \tilde{\boldsymbol{N}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{N}}U) = -4pGr$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}^2 U = -4pGr \tag{5}$$

式(5)是泊松方程，定义 $U$ 为引力势。式(5)是引力势所满足的微分形式，其特解为[2]

$$U = -G\iiint \frac{r(x,h,z)}{r(m,m_0)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

式中 $r(x,h,z)$ 是质量在空间的分布密度，是一已知函数，辅助函数 $\frac{1}{r(m,m_0)}$ 中的 $r(m,m_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 表示空间中点 $m(x,y,z)$ 和点 $m_0(x_0,y_0,z_0)$ 之间的距离。这一特解由辅助函数和给定函数的乘积的积分来表示，式(6)称为引力势的积分形式。

如图2所示，假设质点 $m$ 置于原点，且 $m_0$ 与原点重合，由式(6)得

$$U(x,y,z) = -G\iiint \frac{r(x,h,z)}{r(m,m_0)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}z = -G\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\iiint r(x,h,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}z = -G\frac{m}{r}$$

则

$$U(r) = -G\frac{m}{r} \tag{7}$$

故式(7)是质点形式的引力势。

## 参 考 文 献


1 赵凯华，罗蔚茵. 力学. 北京:高等教育出版社，1995

2 南京大学数学系计算数学专业编. 偏微分方程. 北京:科学出版社, 1979


# Probe into Two Laws of Gravitational Field


Su Wanchun

(Guangzhou Maritime College Guagzhou 510725)



**Abstract** Based on the theory that gravitational field is vector field, this paper expounds the properties of gravitational field. The relevant differential form and integral form are obtained with the help of Gauss theorem and Loop theorem describing the gravitational field.Consequent differential form and integral form of gravitational potential are deduced from the two laws of gravitational field.



**Key words** gravitational form; gravitational field strength; gravitational potential; Gauss theorem; Loop theorem