Cournot模型与Stackelberg模型性质的研究*

赵新顺** 史本山
(河南大学经济贸易学院 开封 475001) (西南交通大学经济管理学院 成都 610031)
王性玉
(河南大学管理学院 开封 475001)

【摘要】在完全信息静态与动态博弈Cournot模型和Stackelberg模型的线性需求假设下的结论基础上，分析了在非线性需求假设下上述模型的一些性质，比较了线性与非线性需求情况下关于先发优势的不同结论。说明了在非线性需求下，企业生产是先行者利益还是后行者利益既取决于该商品的需求函数，也取决该生产商品需求的价格弹性。

关 键 词 博弈； 完全信息； 动态博弈； 非线性需求； 纳什均衡； 先发优势； 后发优势
中图分类号 F224

Cournot模型(简称C模型)和Stackelberg模型(简称S模型)是完全信息静态与动态博弈中的两个非常经典的模型。多数情况下两模型主要用线性需求函数 $P=a-q_1-q_2$ 来分析完全信息静态与动态2人寡头竞争博弈模型。其模型如下

$$\pi_i(q_1,q_2)=q_iP(q_1+q_2)-C_i(q_i) \qquad i=1,2$$

式中 π_i是企业i的利润函数，q_i是企业i的产量，C_i为企业i的成本函数，$P(q_1+q_2)$是价格函数，当需求为线性函数且两企业有相同的不变单位成本时，纳什均衡产量(简称均衡)为

$$\begin{cases} q_1^*=q_2^*=(a-c)/3 \\ Q^*=2(a-c)/3 \end{cases} \tag{1}$$

式中 Q^*是均衡总产量。

均衡利润为

$$\pi_1^*(q_1^*,q_2^*)=\pi_2(q_1^*,q_2^*)=(a-c)^2/9 \tag{2}$$

对于完全信息动态博弈，即S模型，且企业1先行动，企业2后行动，则均衡产量为

$$\begin{cases} q_1^*=(a-c)/2 \\ q_2^*=(a-c)/4 \\ Q^*=3(a-c)/4 \end{cases} \tag{3}$$

均衡利润为

$$\begin{cases} \pi_1^*=(a-c)^2/8 \\ \pi_2^*=(a-c)^2/16 \end{cases} \tag{4}$$

由此得出如下结论：

1) C模型下的总产量高于垄断企业的产量，但低于S模型下的总产量；

2) C模型下的总利润低于垄断企业的利润，但高于S模型下的总利润；

2000年11月13日收稿
* 河南省社会科学规划项目基金资助
** 男 38岁 在职博士生 副教授

3) 在S模型中，由于企业1先行动，致使其产量和利润高于企业2，这种现象称为先发优势。

上述结论是在线性需求的假设下得出的。本文将证明在非线性需求的情况下，有和上述不完全一样的结论。

1　非线性需求下的C模型与S模型的分析

1.1　C模型

若某种商品的需求价格弹性是常数的，故可以引入如下价格函数

$$P(Q)=\lambda Q^{-\frac{1}{k}}$$

式中　$\lambda>0$，$k>1/2$，其中k为需求价格弹性系数

$$Q=q_1+q_2 \tag{5}$$

企业的利润函数为

$$\pi_i=q_i(\lambda Q^{-\frac{1}{k}}-c) \qquad i=1,2 \tag{6}$$

式(6)的一阶条件为

$$\lambda Q^{-\frac{1}{k}}+\lambda(-\frac{1}{k})q_iQ^{-\frac{1}{k}-1}-c=0 \qquad i=1,2 \tag{7}$$

由式(7)可解得企业1与企业2的均衡产量为

$$q_1^*=q_2^*=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda(2k-1)}{2kc}\right]^k \tag{8}$$

均衡总产量为

$$Q_c^*=\left[\frac{\lambda(2k-1)}{2kc}\right]^k \tag{9}$$

均衡利润为

$$\pi_1^*=\pi_2^*=\frac{1}{2}\frac{c}{2k-1}\left[\frac{\lambda(2k-1)}{2kc}\right]^k \tag{10}$$

1.2　S模型

若企业1先决定产量，企业2根据企业1的产量再决定自己的产量，下面用逆向归纳方法求出该博弈模型的均衡解。

若企业1的产量给定q_1，企业2的问题是

$$\max_{q_2\geqslant 0}\pi_2(q_1,q_2)=q_2(P(Q)-c)=q_2(\lambda Q^{-\frac{1}{k}}-c) \tag{11}$$

式(11)的一阶条件为

$$\lambda Q^{-\frac{1}{k}}-\frac{\lambda}{k}q_2Q^{-\frac{1}{k}-1}-c=0 \tag{12}$$

这里q_2是q_1的函数，记为$q_2=f(q_1)$，根据隐函数存在定理对式(12)进行微分可得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q_1}=-\frac{kq_1-q_2}{2kq_1+(k-1)q_2} \tag{13}$$

由于在博弈的第一阶段，企业1会预见到企业2将根据$q_2=f(q_1)$来决定q_2，当然q_2应满足式(12)的要求，所以企业1在博弈的第一阶段的问题就转化为

$$\max_{q_2\geq 0}\pi_1(q_1,f(q_2))=q_1(P(Q)-c)=q_1(\lambda Q^{-\frac{1}{k}}-c) \tag{14}$$

式中 $Q=q_1+q_2=q_1+f(q_1)$。

因此式(14)的一阶条件为

$$\frac{\mathrm{d}\pi_1}{\mathrm{d}q_1}=\lambda Q^{-\frac{1}{k}}-c-\frac{\lambda}{k_1}q_1Q^{-\frac{1}{k}-1}\left(1+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}q_1}\right)=0 \tag{15}$$

由式(12)、式(13)、式(15)可得

$$q_1=\frac{k\pm\sqrt{5k^2-4k}}{2k}q_2$$

依据理性原则，企业1在决定其产量时，一般是选择较高的生产量，以期待较高的利润，故有

$$q_1=\frac{k+\sqrt{5k^2-4k}}{2k}q_2 \tag{16}$$

需要说明的是：当$1>k>\frac{4}{5}$时，$q_1=\frac{k-\sqrt{5k^2-4k}}{2k}q_2$有意义，企业1取此产生量，也不会影响下面的结论。再由式(12)和式(16)可得最优均衡产量

$$\begin{cases}q_1^*=\dfrac{(2-k+\sqrt{5k^2-4k})m(\lambda,c,k)}{2(k+1)}\\ q_2^*=\dfrac{(3k-\sqrt{5k^2-4k})m(\lambda,c,k)}{2(k+1)}\end{cases} \tag{17}$$

均衡总产量为

$$Q_c^*=m(\lambda,c,k) \tag{18}$$

式中 $m(\lambda,c,k)=\frac{\lambda^k}{c^k}\left[\frac{2k^2-k+\sqrt{5k^2-4k}}{2k(k+1)}\right]^k$。由式(16)、式(17)不难看出：1) 当$1>k>\frac{4}{5}$时$q_1^*<q_2^*$，即企业1的产量低于企业2的产量；2) 当$k>1$时，$q_1^*>q_2^*$即企业1的产量高于企业2的产量；3) 当$k=1$时，$q_1^*=q_2^*=\frac{1}{4}\frac{\lambda}{c}$，即企业1与企业2有相同的产量。可见当$k=1$时，C模型与S模型有相同的的结果。

2 讨论分析与结论

下面就不同的价格弹性系数对均衡产量的影响进行分析讨论，并就此得出非线性需求下2个企业的寡头竞争博弈模型的有关产量、利润的结论，进而推证出有关企业生产博弈在何种情况下是先发优势，在何种情况下又是后发优势。

2.1 讨论分析

1) 当$1>k>\frac{4}{5}$时，$Q_s^*<Q_c^*$。

证明：比较式(9)与式(18)

$$\frac{Q_c^*}{Q_s^*}=\left[\frac{\lambda(2k-1)}{2kc}\right]^k\Bigg/\frac{\lambda^k}{c^k}\left[\frac{2k^2-k+\sqrt{5k^2-4k}}{2k(k+1)}\right]^k=$$

$$\left[\frac{2k-1}{2k}\Big/\frac{2k^2-k+\sqrt{5k^2-4k}}{2k(k+1)}\right]^k \tag{19}$$

上式的取值是否大于1，可以化为比较$\frac{2k-1}{2k}$与$\frac{2k^2-k+\sqrt{5k^2-4k}}{2k(k+1)}$大小的问题，进而又可以转换为取值是否大于1的问题

$$\frac{2k-1}{2k}\Big/\frac{2k^2-k+\sqrt{5k^2-4k}}{2k(k+1)}=\frac{2k^2+k-1}{2k^2-k+\sqrt{5k^2-4k}} \tag{20}$$

显然$(2k^2+k-1)-(2k^2-k+\sqrt{5k^2-4k})=2k-1-\sqrt{5k^2-4k}$是单调函数，且当$k$=1时，其值为0；当$k=\frac{4}{5}$时，其值为$\frac{3}{5}$，即该函数是正函数，则式(20)的取值大于1，从而式(19)的取值亦大于1，由此得证$Q_s^*<Q_c^*$。即当商品的需求价格弹性系数小于1时，S模型下的总产量小于C模型下的总产量，因而相应地前者的总利润高于后者的总利润。

2) 当$k=1$ 时，$Q_s^*=Q_c^*$。即当商品的需求价格弹性系数为标准弹性系数1时，S模型下的企业的总产量和C模型下的相一致，因而其总利润也必然一致。

3) 当$k>1$时，$Q_s^*>Q_c^*$。即当商品的需求价格弹性系数大于1时，S模型的总产量大于C模型的总产量，因而相应地前者的总利润低于后者的总利润。

2.2 结　论

1) 当生产的商品的需求价格弹性系数大于1，即商品具有弹性时，非线性需求假设与线性需求假设有相同的结论；

2) 当需求价格的弹性系数为1(标准弹性)时，S模型与C模型得到的结论是一致的，完全信息下静态博弈与动态博弈的结论是相同的；当生产的商品的需求价格弹性系数小于1，即商品缺乏弹性时，非线性需求假设下有如下不同于线性需求假设下的结论：

3) C模型下的总产量高于垄断企业的产量，也高于S模型下的总产量；相应的总利润也低于垄断企业的利润和S模型下的总利润；S模型下的总产量高于垄断企业的产量，总利润低于垄断企业的利润；

4) 在S模型中，企业1先行动，但其产量和利润均低于企业2。显然，该结论迥异于线性需求假设下所得到的结论，企业1不具有先发优势，而企业2则具有后发优势。

由结论4)可以看到，当商品的需求与价格是非线性关系的时候(通常这更接近于经济现实)，若商品的需求价格弹性小于1，先决定产量的企业不具有先发优势，而后决定产量的企业则具有后发优势。由于这个原因，在一些稍微缺乏弹性的商品(如自来水等)的生产经营中，才采用垄断生产经营方式，或者采用国家经营的方式。

参 考 文 献

1 Pindych Robert S, Rubinfeld Daniel L. Microeconomics. New York: Prentice Hall, 1995: 345~348

2 Dew Fudenberg, Tirole Jean. Game theory. Massachusetts : MIT Press ,1991

3 Tang Xiaowo. Study on Cournot model with two firms. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1997, 26(1):83~88[唐小我. 两个生产厂商条件下的古诺模型研究. 电子科技大学学报，1997, 26(1):83~88]

4 Tang Xiaowo, Cheng Hairong. Equilibrium solution and dynamic analysis of general Cournot models. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1996, 25(6):654~659[唐小我，陈海蓉. 一般古诺模型的均衡解和动态分析. 电子科技大学学报，1996, 25(6): 654~659]

5 张维迎，博弈论与信息经济学. 上海: 上海人民出版社, 1996

Research on Quality of Cournot Model and Stackelberg Model Under Nonlinear Demand Hypothesis

Zhao Xinshun

(Economics and Commercial School of Henan University Kaifeng 475001)

Shi Benshan

(College of Economics and Management, Southwest Jiaotong University Chengdu 610031)

Wang Xingyu

(Management School of Henan University Kaifeng 475001)

Abstract In this paper, the conclusion under linear demand drawn from Cournot model and Stackelberg model is reviewed. The difference between two conditions of linear demand and nonlinear demand are discussed. It is concluded that the choose of the first-mover advantage or the second-mover advantage under linear demand is based on the price elasticity of demand.

Key words game; complete information; dynamic game; nonlinear demand; Nash equilibrium; first-mover advantage; second-mover advantage

---

·科研成果介绍·

VXI总线零槽控制器

主研人员: 田书林 陈光禹 王厚军 李 力 徐 亮 顾亚平 徐建南 张卫东 姜鸿飞

VXI总线零槽控制器包括VXI内嵌式控制器和GPIB-VXI转换器。VXI内嵌式控制器以嵌入式工业计算机为基础，GPIB-VXI转换器以MC68030微处理器为核心进行设计，两者均采用专用接口电路并结合可编程电路设计技术实现。两种零槽控制器均具有完善的VXI零槽服务及货源管理功能，并提供MODID线和TTLTRG线。VXI内嵌式控制器的CPU为Pentium MMX220，内存容量达128 MB，内置硬盘和软驱，提供GPIB、RS232以及以太网络等标准接口。VXI总线零槽控制器提供了完备的VISAI/O驱动软件，产品符合VXI总线规范、VPP规范、IEEE488规范以及SCPI规范。VXI内嵌式控制器的主要性能指标与HP E6235A相当，GPIX-VXI转换器的主要性能指标与NI GPIB-VXI相当，该产品实用化程度高，可以推广应用。

·科 卞·