第30卷 第3期
2001年6月

电子科技大学学报
Journal of UEST of China

Vol.30 No.3
Jun. 2001

非线性极大极小问题的一个有效算法

田益祥*　　　　陈华富

（武汉科技大学管理工程系　武汉　430070）（电子科技大学应用数学系　成都　610054）

【摘要】针对一类非线性约束极大极小问题，利用极大熵方法将其转化为带等式、不等式约束的非线性规划问题，给出了一种梯度投影算法，解决了一般约束的非线性大系统优化问题，该算法初始点可任意；同时证明了该算法的全局收敛性。初步的数值试验表明，对于该类极大极小问题，算法有良好的数值表现。

关　键　词　极大极小问题；梯度算法；极大熵方法；算法的收敛性

中图分类号　O212.2

目前极大极小问题的算法大多是针对约束为线性问题构造的[1, 2]。针对一类约束为极大极小问题，可以利用求解约束非线性规划的算法来求解，但该算法的初始点必须是可行点[3]，在实际应用中还有一定的困难。

对于极大极小问题

$$\begin{cases}\min f(x)=\max\{f_i(x)\} \\ \text{s.t}\ g_i(x)\leqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n, f_i:R^n\to R', g_i:R^n\to R', R^n(n\geqslant 1)$ 为n维欧氏空间。式(1)可以转化为

$$\begin{cases}\min f(x)=\max f_i(x) \qquad i=1,2,\cdots,m \\ \text{s.t}\max(g_i(x))\leqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{2}$$

可以利用极大熵方法将式(2)转化为单约束极大极小问题

$$\begin{cases}\min f(x)=\max f_i(x) \qquad i=1,2,\cdots,m \\ \text{s.t}g_p(x))\leqslant 0\end{cases} \tag{3}$$

其中标 $g_p=\dfrac{1}{q}\ln(\sum\limits_{j=1}^{l}\mathrm{e}^{qg_i(x)})$，当其充分大时式(2)与式(3)等价。文献[2，3]给出了不同的解决方法，但只能解决不等式约束，而等式约束往往更困难；文献[4]提出了解非线性规划的广义梯度投影法解决等式约束。

本文以极大熵方法为基础，给出了一种求解上述问题的梯度算法，初始点可任意选取，并证明了算法的收敛性。初步的数值试验表明，本算法在收敛速度和计算精度方面都表现良好。

1　问题、记号

考虑一般性问题

$$\begin{cases}\min f(x)=\max\{f_i(x)\} \qquad i=1,2,\cdots,m \\ \text{s.t}\begin{cases}g_i(x)\leqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,l \\ h_i(x)=0 \qquad i=l+1,l+2,\cdots,k\end{cases}\end{cases} \tag{4}$$

令 $f_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum\limits_{j=1}^{m}\mathrm{e}^{qf_i(x)}$，$g_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum\limits_{j=1}^{l}\mathrm{e}^{qg_j(x)}$，$h_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum\limits_{j=l+1}^{k}\mathrm{e}^{q|h_j(x)|}$，则式(4)转化为

2000年12月5日收稿

* 男　36岁　在职博士生　副教授

$$\begin{cases}\min f_q(x)\\ \text{s.t}\begin{cases}g_q(x)\leqslant 0\\ h_q(x)=0\end{cases}\end{cases}\tag{5}$$

性质 1　当q充分大时式(4)与式(5)等价。

证明　$f_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum_{j=1}^{m}e^{qf_i(x)}$，则 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} f_i(x)\leqslant f_q(x)\leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} f_i(x)+\dfrac{\ln m}{q}$；$g_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum_{j=1}^{l}e^{qg_j(x)}$，则 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l} g_i(x)\leqslant g_q(x)\leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant l} g_i(x)+\dfrac{\ln l}{q}$；$h_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum_{j=l+1}^{k}e^{q|h_j(x)|}$，则 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l}|h_i(x)|\leqslant|h_q(x)|\leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant l}|h_i(x)|+\dfrac{\ln(k-l)}{q}$。当 q 充分大时：$f_q(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l} f_i(x), g_q(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l} g_i(x)$，$|h_q(x)|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l}|h_i(x)|$，所以式(4)与式(5)等价。

下面讨论式(5)的解，为便于记号，简单记为

$$\begin{cases}\min f(x)\\ \text{s.t}\begin{cases}h_1(x)\leqslant 0\\ h_2(x)=0\end{cases}\end{cases}\tag{6}$$

同时记$R=\{x\,|\,h_1(x)\leqslant 0,\quad h_2(x)=0\}$，$g(x)=-\nabla f(x)$，$A_i(x)=\{\nabla h_i(x),\quad i=1,2\}^T$，$p_i(x)=I-A^T{}_i(x)(A_i(x)^T A_i(x))^{-1}A_i(x)$，$B_i(x)=A^T{}_i(x)(A_i(x)^T A_i(x))^{-1}A_i(x)$，$u_i(x)=A^T{}_i(x)(A_i(x)^T A_i(x))^{-1}A_i(x)g(x)=-B_i(x)\nabla f(x)$，$a_+=\max\{0,a\}$，$\rho(x)=(h_1(x))_+ +|h_2(x)|+\max\{(-u(x))_+,\ u(x)g(x)\}$。

本算法在x点迭带方向 $d(x)=-p(x)g(x)-\rho(x)B(x)v(x)$。其中

$$\begin{cases}v(x)=(v_i(x))^T\\ V_i(x)=\begin{cases}(-u_1(x))_+ + h_1(x) & h_1(x)\geqslant 0\quad i=1\\ (-u_1(x))_+ + u_1(x)h_1(x) & h_1(x)<0\quad i=1\\ h_2(x) & i=2\end{cases}\end{cases}\tag{7}$$

定义罚函数$G_C(x)=f(x)+C((h_1(x))_+ +|h_2(x)|)$。

本文假设：1）$f_i(x),g_i(x),h_i(x)$一阶连续可微；2）$\nabla g_i(x),\nabla h_i(x)$线性无关。

2　算法、性质

记$\{\overline{C_k}=\max\{u_i(x)_+, i=1,2\}$，任取$x_1\in R$，$q$=1 000，常数$C_1>0,\varepsilon>0,k:=1$。

1) 计算$f_q(x_k)$，$g_q(x_k)$，$h_q(x_k)$，$u(x_k),p(x_k)$；

2) 若$DG_C(x_k;d^k)=0$，$\rho(x_k)=0$，则x_k是K–T点，停，否则转3)；

3) 若$C_k>C_{k-1}$，令$C_k=\max\{C_k,C_{k-1}+\varepsilon\}$，否则，令$C_k=C_{k-1}$；

4) 求λ^k,λ^k满足下面的条件

$$G_C(x_k+\lambda^k d^k)\leqslant G_C(x_k)$$

$$G_C(x_k+\lambda^k d^k)\leqslant \min G_C(x_k+\lambda d^k)+\varepsilon_k-G_C(x_k)$$

其中$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$\varepsilon_k\geqslant 0$，$\varepsilon_k\to 0$，当$k\to 0$时；

5) $x_{k+1}=x_k+\lambda^k d^k, k:=k+1$转1)。

引理 1[4]　$DG_C(x;d)=\nabla f(x)^T d+C\underset{h_1(x)>0}{\nabla h_1(x)^T d}+C\underset{h_1(x)=0}{(\nabla h_1(x)^T d)_+}+C\underset{h_2(x)>0}{\nabla h_2(x)^T d}+C\underset{h_2(x)<0}{|\nabla h_2(x)^T d|}-C\underset{h_2(x)<0}{\nabla h_2(x)^T d}$。

定理 1　$DG_C(x;d)=0$，则有x是K–T点。

证明 因为$A(x)^T d(x)=-A(x)^T p(x)\nabla f(x)-\rho(x)A^T(x)B(x)V(x)=-\rho(x)V(x)$, $\nabla f(x)^T d=-\|P\nabla f(x)\|^2+\rho(x)u(x)v(x)$。由引理1可得

$$DG_C(x;d)=-\|p\nabla f(x)\|^2+\rho(x)u(x)v(x)-\rho(x)C\{\underset{h_1(x)>0}{v_1(x)}-\underset{h_1(x)=0}{(-v_1(x))_+}+\underset{h_2(x)\geq 0}{v_2(x)}-\underset{h_2(x)<0}{v_2(x)}\}=$$

$$-\|p\nabla f(x)\|^2+\rho\{\underset{h_1(x)>0}{(u_1(x)-C)(h_1(x)+(-u_1(x))_+}-\underset{h_1(x)=0}{(u_1^2(x)+(-u_1(x))_+)}+\underset{h_1(x)<0}{u_1^2(x)h_1(x)}+$$

$$\underset{h_2(x)>0}{(-C+u_2(x))h_2(x)}+\underset{h_2(x)<0}{(C+u_2(x)h_2(x)}\}\triangleq$$

$$-\|p\nabla f(x)\|^2+\rho(x)(M_1+M_2+M_3+M_4+M_5\}$$

由罚函数的定义和C_K可得：当$h_i(x)>0$时，$C\geqslant C_j+C_0, u_j(x)-C\leqslant -C_0<0$;当$h_j(x)<0$时，有 $C\geqslant -u_j(x)+C_0$,即$u_i(x)+C\geqslant C_0>0$，i=1,2，因此，$M_i\leqslant 0,(i=1,2,3,4,5)$，则$DG_C(x;d)\leqslant 0$。若$DG_C(x;d)=0$，有$p\nabla f(x)=0$, $\rho(x)=0$，则$(h_1(x))_+=0,|h_2(x)|=0$。$\max\{(-u_1(x)_+,|u_1(x)h_1(x)|\}=0$，可得$x$是可行点。于是有$u_1(x)\geqslant 0$，$u_1(x)h_1(x)=0, p(x)\nabla f(x)=0$。则$x$是$K$–$T$点。

3 算法的收敛性

引理 2[5] 在有聚点情况下，存在正数K_0，使得当$k\geqslant k_0$时，$C_k=C_{k_0}\triangleq C_0$。

定理 2[6] 算法或有限步终止于式(6)的K–T点，或得到一无限点列，若该点包含在一紧集中，则其任一聚点x^*为式(6)的K–T点.

由定理1，2和性质1可得x^*为式(4)的解

4 数值实验

例：

$$\min(\max\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\})$$

$$\text{s.t}\begin{cases}g_1(x)=x_1^2-x_2\leqslant 0\\ g_2(x)=x_1+x_2-3\leqslant 0\\ h_1(x)=x_1^2-2x_2+1=0\\ h_2(x)=(x_1+1)^2-4x_2=0\end{cases}$$

式中 $f_1(x)=x_1^4+x_2^2$，$f_2(x)=(2-x_1)^2+(2-x_2)^2$，$f_3(x)=2\exp(-x_1+x_2)$。

根据本算法取初始点x=(0,0)，用MATLAB语言编写，x^*=（0.999 999 237 2,0.999 999 893 1），目标函数值$f(x^*)$=2.000 000 952 5。从数值实验表明，该数值实验效果较好，而且收敛速度较快。

参考文献

1 王云诚，唐焕文. 一类非线性大系统优化问题的逼近算法.系统工程学报, 1999, 4: 366~369

2 李兴斯. 非线性极大极小问题的一个有效解法. 科学通报, 1991,19: 1 448~1 456

3 施保昌，陆 磊. 约束极大极小问题的一类有效算法. 系统工程，1998，16(6): 11~15

4 Chen Huafu. A pertrubed gradient projection method with arbitrary initial point for general constrained optimization problems. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1997, 26(6): 645~649[陈华富. 初始点任意的摄动梯度投影算法. 电子科技大学学报, 1997, 26(6): 645~649]

5 Chen Huafu, Tian Yixiang. A general projection gradient method for general max-min problems. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000, 29(3):319~322[陈华富，田益祥. 一般约束极大极小问题的广义梯度投影算法. 电子科技大学学报，2000，29(3): 319~322]

6 Chen Huafu. A projection gradient method for general max-min problem. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000, 29(6): 662~665[陈华富. 一般约束极大极小问题的梯度投影算法. 电子科技大学学报, 2000, 29(6): 662~665]

An Effective Algorithm for Nonlinear Constraint Max-min Problems

Tian Yixiang
(Dept. of Management , Wuhan Science and Technology University　Wuhan　430070)
Chen Huafu
(Dept. of Applied Math., UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　In this paper, a gradient projection algorithm using maxim-entropy methods is analyzed and a class of max-min problems with nonlinear constraints are changed into nonlinear programming problems with inequality and equality constra. The algorithm which resolves general max-min problems is global convergent. Preliminary numerical experiments show that the proposed algorithm is effective.

Key words　max-min problem;　gradient projection;　maxi-entropy;　convergence

---

·科研成果介绍·

2GC频段扩频技术研究

主研人员: 李少谦　何　旭　唐万彬　李仲会　周　亮　雷　霞　刘纯勤　王　方　陈　文　付　斌

用2GC频段扩频技术研制了2.5 GHz高灵敏扩频接收机和2.4 GHz扩频通信机，并构成了可用于计算机无线局域网中的无线通信网卡，该网卡实现了符合IEEE802.1协议标准的物理层功能，并支持1 Mbps数据速率，能基本满足目前大部分传输业务的要求。提高了综合抗干扰通信系统的评估方法和标准等理论，建立了电磁干扰中干扰强度计算数学模型和通用干扰环境威胁等级划分标准，采用了全局到局部逐步深入的分层递阶方法和模糊数学处理方法应用于通信系统抗干扰性的评估。在模糊评估中引入一种新的聚类有效性函数表征FCM算法中的聚类有效性，构成了通信系统干扰性能评估软件仿真平台，并获得了相应的评估结果。

·科　卞·