

瑞利衰落信道Turbo码的精确性能上限*

李光球**

(杭州电子工业学院通信工程分院 杭州 310037)

【摘要】研究了慢变频率非选择性瑞利衰落信道下Turbo码的性能。采用修正的欧几里德距离量度和信道状态信息进行最大似然译码的Turbo译码器，推导出完全交织瑞利衰落信道基于联合限和码字重量分布的性能上限，为瑞利衰落信道下Turbo码的设计提供一个有效的分析工具。

关键词 Turbo码；瑞利衰落信道；最大似然译码；联合限

中图分类号 TN911.22

C.Berrou等人提出的Turbo码具有接近山农信道容量极限的差错纠正能力，其性能引起了国际信息论与编码界的广泛关注，Turbo码的分析与设计成了当前热门的研究课题^[1~7]。Turbo码在加性白高斯噪声(AWGN)信道下的设计与性能分析已进行了大量的研究，在衰落信道下的设计与性能分析也已引起人们的关注^[3, 4]。Hall和Wilson研究了完全交织瑞利衰落信道Turbo码的性能，提出Turbo码的联合限只能通过数值计算或采用紧的上限来获得^[3]。瑞利衰落信道是莱斯系数为零的莱斯衰落信道，文献[4]利用互补误差函数的上限给出了莱斯衰落信道下Turbo码的性能上限，很显然，文献[4]获得的性能限对瑞利信道并不精确。本文推导了瑞利衰落信道下Turbo码性能上限的精确数学表达式，并给出应用实例。

1 瑞利衰落信道成对差错概率的精确表达式

考虑慢变频率非选择性完全交织瑞利衰落信道。假定Turbo码的编码序列 $c_n=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 经BPSK调制后形成调制序列 $x_n=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在瑞利衰落信道上传输，信道衰减为 $a_n=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，在接收端的接收序列为 $y_n=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ，则有

$$y_i = a_i x_i + n_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中 n_i 为单边功率谱密度为 N_0 的加性白高斯噪声； a_i 为瑞利分布随机变量。由于假定衰落是慢变化的，即在一个传输信号间隔内 a_i 为恒定^[8]，其概率密度为

$$P_A(a) = 2ae^{-a^2} \quad a \geq 0 \quad (2)$$

假定信道具有理想的信道状态信息，译码器使用修正的欧几里德距离量度

$$m(\mathbf{y}, \mathbf{x} | \mathbf{a}) = - \sum_{i=1}^n |y_i - a_i x_i|^2 \quad (3)$$

进行最大似然译码，译码器输出传输序列 $x_n=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的估值序列 $\hat{x}_n=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ 。 \hat{x}_n 与 x_n 之间的汉明距离为 d ， a_{i_k} ($k=1, 2, \dots, d$)表示第 i 个比特间隔 \hat{x}_n 与 x_n 不同时衰落幅度的值，则在给定 a_n 条件下的成对错误概率为^[3, 4]

$$P_d(x_n, \hat{x}_n | a_n) = Q \left(\sqrt{2R \frac{E_b}{N_0} \sum_{k=1}^d a_{i_k}^2} \right) \quad (4)$$

式中 R 为Turbo码的码率， $Q(x)$ 为互补误差函数。

由于假定信道为完全交织瑞利衰落信道，因此，衰落幅度相互独立，即 a_{i_k} 的位置并不重要。对所有 a_{i_k} ($k=1, 2, \dots, d$)求平均可得成对错误概率

2000年12月9日收稿

* 国家自然科学基金资助项目，编号：69972014；教育部高等学校骨干教师资助计划项目

** 男 35岁 博士 教授

$$P_d(\mathbf{x}_n, \hat{\mathbf{x}}_n) = \int_{a_1} \cdots \int_{a_d} P_A(a_1, a_2, \cdots, a_d) Q \left[\sqrt{2R \left(\frac{E_b}{N_0} \right) \sum_{k=1}^d a_k^2} \right] da_1 da_2 \cdots da_d \quad (5)$$

式中

$$P_A(a_1, a_2, \cdots, a_d) = \prod_{i=1}^d P_A(a_i) \quad (6)$$

利用 $Q(x)$ 的另一种表示式

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-x^2/(2 \sin^2 f)} df \quad (7)$$

可得

$$P_d(\mathbf{x}_n, \hat{\mathbf{x}}_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\sin^2 f / \left(\frac{RE_b}{N_0} + \sin^2 f \right) \right]^d df \quad (8)$$

利用文献[9]中的式(61)、(64)和式(67)的结果可得

$$P_d(\mathbf{x}_n, \hat{\mathbf{x}}_n) = \left(\frac{1-u}{2} \right)^d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1+j}{j} \left(\frac{1+u}{2} \right)^j \quad (9)$$

式中

$$u = \sqrt{\left(\frac{RE_b}{N_0} \right) / \left(1 + \frac{RE_b}{N_0} \right)} \quad (10)$$

其中 \bar{E}_b / N_0 为平均比特信噪比。

2 Turbo 码的性能限与应用举例

假定 Turbo 码由分量码 C_1 和 C_2 经长度为 N 的交织器并行级连而成, 交织器为均匀交织器, $A_w^{C_1}(Z)$ 、 $A_w^{C_2}(Z)$ 分别为 C_1 和 C_2 的条件重量枚举函数, 则 Turbo 码的条件重量枚举函数为^[2]

$$A_w(Z) = \sum_j A_{w,j} Z^j = \frac{A_w^{C_1}(Z) A_w^{C_2}(Z)}{\binom{N}{w}} \quad (11)$$

式中 $A_{w,j}$ 为输入信息重量为 w 、校验重量为 j 、汉明重量 $d=w+j$ 的码字数目。汉明重量为 d 的码字对误比特率影响的错误系数为

$$A_d = \sum_w \sum_{j=d-w} \frac{w}{N} A_{w,j} \quad (12)$$

使用距离谱, 可得完全交织瑞利衰落信道下 Turbo 码的性能上限为

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\min}}^{\infty} A_d P_d(\mathbf{x}_n, \hat{\mathbf{x}}_n) \quad (13)$$

式中 $P_d(\mathbf{x}_n, \hat{\mathbf{x}}_n)$ 由式(9)给出, d_{\min} 为 Turbo 码的最小汉明距离。至此, 得到了瑞利衰落信道 Turbo 码的性能上限的精确数学表达式。应用文献[2, 7]中的方法可以比较方便地求得分量码的条件重量枚举函数, 由式(9)、式(11)~(13)可求得某一特定 Turbo 码性能的分析平均上限。

应用举例: 不失一般性, 可假定 Turbo 码由相同分量码组成, 图1示出了不同交织器长度 ($N=100$ 、 $1\ 000$ 、 $10\ 000$) 下分量码生成矩阵为 $\left[1, \frac{1+D+D^2}{1+D^2} \right]$ 的 Turbo 码性能上限的计算结果。由图1可知, 在

完全交织瑞利衰落信道, 增加交织器长度可以显著改善 Turbo 码的性能。通过分析不难看出, 应用本文的性能上限可以比较不同的 Turbo 码在瑞利衰落信道下的性能, 寻找瑞利衰落信道下的 Turbo 码好码。

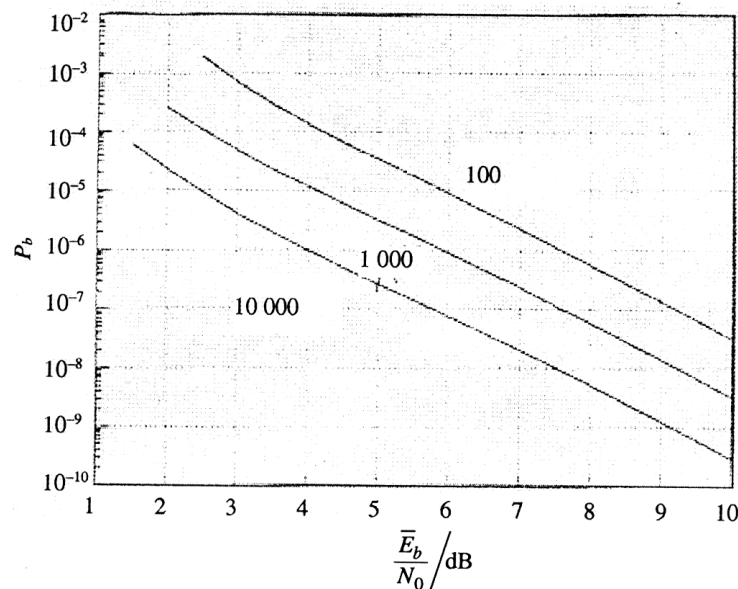


图1 瑞利衰落信道不同交织器长度 Turbo 码的性能上限

3 结 论

本文基于联合限和码字重量分布导出了瑞利衰落信道下 Turbo 码性能的精确分析平均上限, 为瑞利衰落信道 Turbo 码的设计与性能分析提供了一个有效的工具。与文献[3]相比, 本文的性能限具有计算简单、精确、应用方便的特点, 无须使用数值积分或紧的上限来获得 Turbo 码的性能上限。

参 考 文 献

- 1 Berrou C, Glavieux A, Thitimajshima P. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes(1). Proc of IEEE ICC: Geneva, Switzerland, 1993: 1 064~1 070
- 2 Benedetto S, Montorsi G. Unveiling turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42(2): 409~428
- 3 Hall E K, Wilson S G. Design and analysis of turbo codes on Rayleigh fading channels. IEEE JSAC, 1998, 16(2):160~173
- 4 Yuan Jinhong, Vucetic B. Turbo code performance on Rician fading channels. Proc of IEEE ICC, 1999: 83~87
- 5 Zhang Zhongpei, Jin Fan. Analysis of interleaver design of Turbo-codes based on relativity. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000, 29(1):25~28[张中培, 靳 蕃. 从相关性分析 Turbo 码交织器的设计. 电子科技大学学报, 2000, 29(1): 25~28]
- 6 Yang Donglin, Ye Wu. Turbo CDMA multi-user detection. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000, 29(3): 247~251[杨东林, 叶 梧. Turbo 码 CDMA 多用户检测的研究. 电子科技大学学报, 2000, 29(3): 247~251]
- 7 Benedetto S, Biglieri. Principles of digital transmission: with wireless application. New York: Kluwer academic / plenum publishers, 1999: 532~625
- 8 Li Guangqiu, Xu Qiang. Performance of multiresolution 64-QAM in Rayleigh-fading Channel. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1998, 27(3): 236~240[李光球, 许 强. 瑞利衰落信道多分辨率64QAM的性能研究. 电子科技大学学报, 1998, 27(3): 236~240]
- 9 Alouini M S, Goldsmith A J. A unified approach for calculating error rates of linearly modulated signals over generalized fading channels. IEEE Trans Commun, 1999, 47(9):1 324~1 334

Exact Upper Bound of Turbo Code Performance on Rayleigh Fading Channel

Li Guangqiu

(Inst. of Communication Eng., Hangzhou Institute of Electronic Engineering Hangzhou 310037)

Abstract The performance of turbo codes on frequency non-selective slow Rayleigh fading channels is investigated in this paper. The turbo decoder which performs maximum-likelihood(ML) decoding using the modified Euclidean distance metric and channel state information is considered. Based on the union bound and code weight distributions, the exact upper limit of turbo codes performance on fully interleaved Rayleigh fading channel is derived. A efficient tool for the design and analysis of turbo codes on Rayleigh fading channels is presented.

Key words turbo codes; Rayleigh fading channel; maximum-likelihood decoding; union bound

• 科研成果介绍 •

双/多基地雷达、低截获概率雷达侦察干扰机理研究

主研人员: 李立萍 陈天麒 毛自灿 孟 静 吴晓冰 王激杨 黄佑勇 史庆波 郭东军 葛利嘉 毛 健

本项目的研究包括双/多基地雷达侦察干扰机理研究和低截获概率雷达的侦察干扰机理研究两部分。对双/多基地雷达提出了同时利用雷达侦察和通信侦察两种手段来侦察有雷达辐射的发射站和无雷达辐射的接收站,突破了双/多基地雷达接收站不可侦察的概念,为进一步研究双/多基地雷达侦察干扰奠定了基础。对二相编码雷达针对其信号的低截获特性,提出两种识别和干扰的方法,仿真实验取得满意的效果。对提高侦察和干扰的技术水平,为国防现代化起到一定的促进作用。

HF全自适应通信系统

主研人员: 李晓锋 等

HF全自适应通信系统完成了一个具有3个节点的“HF全自适应通信系统”试验网络系统的设计。该网络节点由网络控制器、网络频率管理数字加密与密钥分发、自适应调制解调器、自适应选频控制器、自适应跳频电子等部分构成,完成了试验网络系统室内联试和短波线路实验。

• 项 曦 •